Lehrbuch

der

dis-isometrischen und mono-isometrischen

Parallelperspektive

mit besonderer Rücksicht

auf

das technische Zeichnen,

von

O. Möllinger,

Professor an der höheren Lehranstalt in Solothurn.

Mit 6 lithographirten Tafeln.

Zürich und Frauenfeld.

Druck und Verlag von Ch. Beyel.

1853.

Vorrede.

Die „isometrische Projektionslehre oder Parallelperspektive“ wurde seit ihrer Einführung durch Professor Farish in Cambridge, der sich ihrer im Jahre 1820 zum ersten Male bei der Darstellung von Maschinen-Modellen bediente, nicht nur mehrfach erweitert, sondern auch auf einen höheren wissenschaftlichen Standpunkt erhoben, so daß sie gegenwärtig einen wesentlichen Zweig der darstellenden Geometrie bildet und sowohl in theoretischer als in praktischer Beziehung unter allen Projektionsmethoden, welche einen Körper verständlich (perspektivisch) darzustellen bezwecken, die vorzüglichste genannt werden darf*); denn nur in einigen

*) Unbegreiflicher Weise wird von Herrn Prof. Haindl in München der „Kavalierperspektive“ gegenüber der isometrischen Parallelperspektive das Wort geredet. Die Kavalierperspektive ist aber bekanntermaßen eine schiefe Projektionsmethode und kann daher nur Zerrbilder liefern, wie das elliptische Bild einer Kugel zur Genüge darstellt. Die Wahrheit und Schönheit eines Bildes darf aber nicht der (vermeintlichen) Einfachheit einer unnatürlichen Konstruktionsmethode aufgeopfert werden. Bei dieser Gelegenheit bemerken wir, daß Prof. Haindl die isometrischen Darstellungen doppelt schiefe Projektionen nennt, offenbar mit demselben Rechte, als man einen aufrecht stehenden Menschen einen „zweifach schief stehenden“ nennen könnte. Ohne Zweifel wollte Prof. Haindl durch jenes Prädikat andeuten, daß die isometrische Projektion eines Körpers durch eine zweifache Drehung desselben erhalten werde; wenn wir dieß auch zugeben wollten (obgleich der Begriff der isometrischen Projektion viel enger gezogen ist), so haben wir dagegen zu bemerken, daß das Resultat der Doppeldrehung keine schiefe, sondern eine senkrechte Projektion ist. Die von Haindl gewählte Bezeichnungsweise ist daher eine wesentlich unrichtige.

wenigen Fällen kann die Polarperspektive nicht durch die „isometrische Parallelperspektive“ ersetzt werden.

Die Geschichte der isometrischen Parallelperspektive, sowie sich dieselbe in Deutschland entwickelt hat, ist in Kurzem folgende: Im Jahre 1840 habe ich in meiner bei Jent und Gaßmann in Solothurn erschienenen „isometrischen Projektionslehre“ gezeigt, daß die Methode Farish's nur ein besonderer Fall einer allgemeinen Projektionsmethode sei, welche, gestützt auf eine naturgemäße Hypothese und auf die Prinzipien der Coordinaten-Geometrie, die Möglichkeit gewährt, einen Körper auf einer Ebene darzustellen, die auf einer beliebig gewählten Sehrichtung senkrecht steht, und zugleich in dem Bilde des Körpers alle mit zwei horizontalen Hauptrichtungen parallele Linien in ihrer wahren Größe zu erhalten.

Auch habe ich dort die Anwendung dieser Prinzipien auf die Schattenkonstruktionen gelehrt und durch ein Beispiel erläutert. Endlich zeigte ich in meiner deutschen Bearbeitung von Adhemar's Lehre des Steinschnittes, die Anwendungen auf die Darstellung der Steinschnitte und ihren Gebrauch bei der Ausführung derselben.

Im Jahre 1844 erschien sodann eine analytische Untersuchung von Hrn. Prof. Weisbach in Freiberg, welche in den von Karmarsch und Volz redigirten „polytechnischen Mittheilungen“ veröffentlicht wurde und den Titel führte: „Ueber die monodimetrische und anisometrische Projektionslehre“. Die Lage der drei Projektionsaxen, welche sich Weisbach parallel

mit den drei Hauptrichtungen eines Körpers dachte, sowie die Verhältnisse der Projektionen gleicher Axentheile wurden für eine beliebige Sehrichtung durch trigonometrische Formeln bestimmt. Zugleich wurden die Eigenschaften der isometrischen Projektionen analytisch begründet und die bereits bekannten Methoden um die monodimetrische Projektionsmethode vermehrt. Während ich nämlich durch die zweiaxig-isometrische Projektionsmethode für eine gewisse Sehrichtung die Längen und Breiten der Körper isometrisch darstellen lehrte, für den Fall aber, wo ich den Sehstrahlen eine willkührliche Lage ertheilte, ein neues Axensystem wählte, wodurch statt der Längen und Breiten des Körpers, die mit den horizontalen Projektionsaxen parallelen Coordinaten isometrisch wurden, was die Konstruktion solcher Projektionen*) allerdings umständlich machte, hat Weisbach nachgewiesen, daß noch eine besondere Sehrichtung möglich ist, bei welcher die Projektionen ein sehr gefälliges Aussehen erhalten, und die Höhen und Längen oder die Höhen und Breiten der Körper isometrisch werden, während gleichzeitig die Dimensionen, welche mit der dritten Hauptrichtung parallel sind, in sehr einfache Verhältnisse zu den Höhen gebracht werden können. Diesen Fall der zweiaxig-isometrischen Projektionsmethode hatte ich, obgleich er sich von selbst darzubieten scheint, vollkommen übersehen und sogar der Darstellung des Hrn. Weisbach, ohne Zweifel dadurch irre geleitet, daß derselbe die vertikale Coordinatenaxe, der allgemeinen Uebung entgegen, als die Axe der x

*) Dieselben entsprechen Weisbachs anisometrischen Projektionen, deren Konstruktion jedoch nicht weniger mühsam ist.

bezeichnete, eine falsche Deutung unterlegt, die in diesem Werke an mehreren Stellen (Seite 26, 41, 49) ihren Ausdruck fand. Da die erste Hälfte dieses Werkes schon seit Langem gedruckt ist, so war es mir leider unmöglich, diese Stellen zu tilgen, und ich muß daher den hochverehrten Mann um freundliche Nachsicht wegen dieses theilweise von ihm selbst veranlaßten Irrthums bitten.

Nachdem Weisbachs Untersuchungen veröffentlicht waren, zeigte ich (1845) in dem Anhange meiner Uebersetzung von Adhemar's darstellenden Geometrie, wie die allgemeinen Aufgaben der darstellenden Geometrie durch die dreiaxig-isometrische Methode, mit Hülfe einiger Elementaraufgaben, welche bis dahin dem Gebiete der isometrischen Projektionslehre fremd waren (namentlich die unmittelbare Konstruktion isometrisch-senkrechter Linien), unmittelbar gelöst werden können. Bald darauf versuchte ich, da mir Weisbachs analytische Untersuchung nicht einfach genug zu sein schien und eine geometrische Konstruktion der gefundenen Formeln von dem ehrenwerthen Verfasser nicht mitgetheilt worden war, die mathematische Begründung der isometrischen Parallelperspektive auf einem einfacheren, nicht weniger allgemeinen Wege zu erreichen und zugleich die gefundenen Formeln in die Sprache der Geometrie überzutragen. Auf diese Weise entstanden die beiden ersten Theile dieses Werkes. Der erste ist der Entwickelung der allgemeinen Gleichungen gewidmet, wodurch einerseits die Eigenschaften der isometrischen Projektionen für jede Lage der Sehrichtung enthüllt werden, und andererseits die Werthe der zur

Ausführung solcher Projektionen nöthigen Elemente berechnet werden können. Der zweite Theil beschäftigt sich mit der Anwendung dieser Gleichungen auf das technische Zeichnen; es werden darin zuerst einige Hülfstafeln mitgetheilt, welche den Zeichner des Selbstrechnens entheben, und sodann wird gezeigt, wie alle nothwendigen Elemente einer isometrischen Projektion durch Konstruktion gefunden werden können.

Als diese Arbeit bereits im Drucke vollendet war, erschien im Jahre 1852 das Lehrbuch der Axonometrie von C. Th. Meyer, Lehrer an der Baugewerkschule in Freiberg und M. N. Meyer, Lehrer an der Handelslehranstalt in Leipzig. Die wissenschaftliche Ausbildung der isometrischen Parallelperspektive ist durch dieses Werk nicht vervollkommnet worden; denn die HH. Verfasser haben die Abhandlung von Prof. Weisbach als Ausgangspunkt und die Gleichungen derselben zur Berechnung der Elemente zahlreicher Projektionsbeispiele benützt. Wir erkennen jedoch gerne an, daß sie sich durch die reichhaltige Zusammenstellung gut gewählter Beispiele aus allen Zweigen des technischen Zeichnens ein entschiedenes Verdienst erworben und ohne Zweifel wesentlich dazu beigetragen haben, wenn sich die isometrische Parallelperspektive nach kurzer Zeit allenthalben Eingang verschaffen wird.

Leider muß ich dieser offenen Anerkennung die Bemerkung beifügen, daß man im ganzen Werke vergeblich nach einer geometrischen Methode sucht, welche den Anfänger befähigt, eine zweiaxig-isometrische Projektion auszuführen, und zwar selbst dann nicht, nachdem er mit Hülfe der Weisbach'schen Formeln, die Winkel der

Projektionsaxen berechnet hat. Es schien mir daher dringend geboten, eine so wichtige Zeichnungsmethode aus dem fremdartigen Gebiete der trigonometrischen Analysis wieder auf den heimatlichen Boden der darstellenden Geometrie zu verpflanzen. So entstand nun in jüngster Zeit der vierte Theil dieses Werkes, worin alle Hauptaufgaben, welche im Gebiete der isometrischen Parallelperspektive gestellt werden können, und im technischen Zeichnen eine häufige und nützliche Anwendung finden, durch die Elemente der darstellenden Geometrie gelöst werden.

Während daher die erste Hälfte dieses Werkes vorzüglich dem Gebiete der reinen Mathematik anheimfällt, empfehle ich das Studium der zweiten Hälfte oder des vierten Theiles allen denjenigen, welche mit den Elementarkenntnissen der Geometrie und des geometrischen Zeichnens ausgerüstet sind, und die zweckmäßigsten Methoden zur Konstruktion perspektivischer Zeichnungen für parallele Sehstrahlen in wenigen Stunden gründlich kennen lernen wollen.*) Ich hoffe dadurch das Erscheinen dieses Werkes hinlänglich gerechtfertigt zu haben.

*) Anfängern ertheile ich übrigens den Rath, gleichzeitig meine bei Jent und Gaßmann erschienene „isometrische Projektionslehre" zu benutzen, wo (abgesehen von verschiedenen Mängeln, welche in der schnellen Ausführung dieses Werkes ihren Grund haben) die isometrische Darstellung der geometrischen Körper, nebst dem gesammten Konstruktionsdetail, gründlich behandelt wird.

Solothurn den 31. Januar 1853.

Der Verfasser.

Inhalts-Anzeige.

Erster Theil.

Analysis der isometrischen Projektionslehre.

Zweiter Theil.

Anwendung der allgemeinen Formeln auf das technische Zeichnen.

Dritter Theil.

Vierter Theil.

Entwicklung der isometrischen Projektionsmethoden durch die Elemente der darstellenden Geometrie.

Erster Theil.

Analysis der isometrischen Projektionslehre.

Allgemeine Methode,

einen durch seine Horizontal- und Vertikalprojektion gegebenen Körper auf eine bestimmte Ebene zu projiziren.

§. 1.

Wenn ein durch seine Horizontal- und Vertikalprojektion gegebener Körper auf irgend eine Ebene projizirt werden soll, welche zu den ursprünglichen Projektionsebenen eine gegebene Lage besitzt, so hat man, nach den allgemeinen Prinzipien der darstellenden Geometrie, aus allen Punkten des Körpers senkrechte Linien auf die neue Projektionsebene zu fällen, die Fußpunkte derselben zu bestimmen, und sodann die Ebene selbst nebst den darin bestimmten Punkten durch Drehung um ihre horizontale oder vertikale Spur in eine der beiden Projektionsebenen niederzulegen. Wenn man nun die niedergelegten Fußpunkte der Senkrechten durch entsprechende Linien verbindet, so ergibt sich die gesuchte Projektion des Körpers in der neuen Projektionsebene.

Eine zweite Methode, nach welcher diese Aufgabe in den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie gelöst wird, besteht darin, daß man dem Körper durch zwei Hauptdrehungen eine solche Stellung zur horizontalen Projektionsebene gibt, daß die Horizontalprojektion, welche der neuen Stellung des Körpers entspricht, derjenigen gleich wird, welche man durch unmittelbare Projizirung des Körpers auf die gegebene Projektionsebene erhalten würde. Wenn nun auch diese zweite Methode schneller zum Ziele führt

als die erste, so ist dennoch auch sie in den meisten Fällen sehr zeitraubend und bei zusammengesetzten Körpern praktisch unausführbar.

In meiner „isometrischen Projektionslehre" habe ich bereits im Jahre 1840 eine höchst einfache und vorzüglich praktische Methode auseinandergesetzt, welche die obige Aufgabe nicht nur auf die allgemeinste Weise löst, sondern zugleich den Vorzug besitzt, daß diejenigen Dimensionen des Körpers, welche mit zwei, durch die Seh- oder Projektionsrichtung, ihrer Lage nach bedingten Axen parallel sind, in ihrer wahren Größe erscheinen.

Die Prinzipien dieser Methode, welche ich die dis-isometrische oder zweiaxig-isometrische Projektionsmethode genannt habe, werde ich nun in diesem Werkchen auf den allgemeinsten Fall der Projektionslehre zurückführen und aus einigen wenigen allgemeinen Formeln diejenigen Konstruktionen und Regeln für die dis-isometrische Projektionslehre herleiten, welche für die praktische Anwendung beim technischen Zeichnen die geeignetsten und einfachsten sind.

§. 2.

Die Aufgabe: Man soll einen Körper auf eine gegebene Ebene projiziren, läßt sich auf die folgende zurückführen: Man soll die Projektionen der drei Axen irgend eines rechtwinklichen Coordinatensystems, auf welches der Körper bezogen worden ist, in einer gegebenen Projektionsebene bestimmen.

§. 3.

Aufgabe. Es sei in Fig. 1: die horizontale und die vertikale Projektion irgend eines Körpers, z. B. eines Teträders, (S, M P Q, S′, M′ P′Q′) gegeben. Dieser Körper soll auf eine beliebige Ebene ABC projizirt werden, deren Lage zu den beiden Projektionsebenen durch ihre Spuren gegeben ist.

Um eine möglichst allgemeine Lösung dieser Aufgabe zu erhalten, denke man sich den gegebenen Körper auf ein beliebiges

System dreier senkrecht aufeinander stehenden Coordinatenebenen bezogen, das anfänglich eine solche Lage besitzen mag, daß die eine der drei Ebenen mit der horizontalen Projektionsebene zusammenfällt, so daß die beiden Coordinatenaxen M x und M y (Fig. 1) des neuen Systems in der horizontalen Projektionsebene liegen, während die dritte Axe (M, M′z′) auf dieser Ebene senkrecht steht, also ihre horizontale Projektion mit dem Punkte M zusammenfällt.

§. 4.

Es sei nun (NL, N′L′) irgend eine Linie, welche auf der Ebene ABC senkrecht steht, und daher die Richtung der projizirenden Linien bezeichnet, so wird der Winkel N″LN, welchen diese Richtung mit der horizontalen Projektionsebene bildet, dadurch erhalten, daß man in irgend einem Punkte der horizontalen Projektion NL, auf dieser eine Senkrechte NN″ errichtet, diese gleich dem Höhenunterschiede N′n des Punktes (N, N′) und eines andern beliebigen Punktes (L, L′) macht, und sodann den Punkt N″ mit dem Punkte L verbindet.

Diesen Winkel, welchen die Projektionsrichtung (NL, N′L′) mit der horizontalen Projektionsebene bildet, wollen wir mit φ bezeichnen. Wir können uns, weil gewöhnlich statt der Projektionsebene ABC die auf ihr senkrecht stehende Richtung der projizirenden Linien, d. h. die Sehrichtung gegeben ist, die obige Aufgabe auch in folgender Form aufstellen:

Man soll einen durch seine Horizontal- und Vertikalprojektion gegebenen Körper auf diejenige Ebene projiziren, welche auf einer gegebenen Sehrichtung senkrecht steht.

§. 5.

Um diese Aufgabe zu lösen, denke man sich den gegebenen Körper nebst dem neuen Coordinatensystem, auf welches seine Punkte durch die Ordinaten P a, Q b, S s und S′t′ bezogen worden sind, um die horizontale Spur einer auf der Linie (NL, N′L′) senkrecht stehenden, willkührlich gewählten Projektionsebene ABC so weit gedreht, bis die neue Projektionsrichtung, welche wir uns mit dem Körper unveränderlich verbunden denken, auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht.

In Folge dieser Drehung wird die Ebene ABC, worin die neue Projektion des gegebenen Körpers konstruirt werden soll, mit der horizontalen Projektionsebene zusammenfallen und die Horizontalprojektion des Körpers in derjenigen Stellung, welche er nach der Drehung einnimmt, muß die gesuchte Projektion desselben in der Ebene ABC sein.

Da nun die Coordinaten aller Punkte des Körpers mit den drei Coordinatenaxen Mx, My, und Mz, parallel sind, so müssen auch die Projektionen der Coordinaten mit den Projektionen der Coordinatenaxen parallel sein und in demselben Verhältnisse verkürzt werden, wie beliebige oder gleich große Theile der entsprechenden Coordinatenaxen in ihren Projektionen verkürzt erscheinen.

§. 6.

Auf diese Betrachtungen gestützt, kann nun die obige Aufgabe auf folgende einfachere zurückgeführt werden, die wir als

Erste Hauptaufgabe

bezeichnen wollen.

Irgend ein rechtwinkliches Coordinatensystem, in welchem die eine der drei senkrechten Ebenen eine horizontale Lage besitzt, wird um eine in der horizontalen Ebene liegende Axe gedreht. Man soll, wenn der Drehungswinkel und die Lage der Coordinatenaxen zu der Drehungsaxe gegeben sind:

1) die Winkel bestimmen, welche die horizontalen Projektionen der gedrehten Coordinatenaxen mit einander bilden.
2) Man soll die Winkel bestimmen, welche die Coordinatenaxen nach ihrer Drehung mit der horizontalen Projektionsebene bilden.
3) Man soll die Verhältnisse bestimmen, in welchen die Projektionen gleich großer Theile der drei Coordinatenaxen zu einander stehen.

Die Beantwortung dieser Aufgabe wird uns sofort auch die Mittel an die Hand geben, um die folgende zweite Hauptaufgabe lösen zu können.

Zweite Hauptaufgabe.

§. 7.

Die Verhältnisse, in welchen die horizontalen Projektionen gleich großer Theile der drei Axen eines beliebigen senkrechten Coordinatensystems zu einander stehen, sind gegeben. Man soll:

1) die Winkel bestimmen, welche die Coordinatenaxen mit der horizontalen Projektionsebene bilden, worauf dieselben bezogen worden sind.
2) Man soll die Winkel bestimmen, welche die horizontalen Projektionen der drei Axen je zwei und zwei einschließen.
3) Man soll die Verhältnisse der auf den Axen befindlichen und mit den Axen parallelen Linien zu ihren Projektionen berechnen.

Lösung der ersten Hauptaufgabe.

§. 8.

Da die ursprüngliche Stellung des Coordinatensystems vollkommen gleichgültig ist, so haben wir, wie Figur 1 zeigt, der Einfachheit wegen angenommen, daß die erste der drei Coordinatenebenen eine horizontale und daher die beiden andern eine vertikale Lage besitzen.

Es seien Mx, My und Mz (Figur 2) die neuen Lagen der Coordinatenaxen nach der Drehung, Mx_1, My_1 und Mz_1 ihre Projektionen in der horizontalen Projektionsebene. Ferner sei MN die gegebene Projektionsrichtung, welche nach der Drehung auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht, und wie sich aus Fig. 1 ergibt, einen Winkel $= 90^0 - \varphi$ beschrieben hat, weil sie ursprünglich den Winkel φ mit ihr bildete. Diesen Winkel ($= 90^0 - \varphi$) muß daher auch die Coordinatenaxe Mz beschrieben haben, und es ist folglich der Winkel

$$NMz = 90^0 - \varphi \text{ und}$$
$$zMz_1 = \varphi$$

Bezeichnen wir ferner den Winkel $x M x_1$ mit a
" " $y M y_1$ " a'
" " $x M A$ " h
" " $y M A'$ " h'
" " $x_1 M A$ " b
" " $y_1 M A'$ " b'

und denken wir uns das ganze Coordinatensystem von einer Kugelfläche durchschnitten, deren Halbmesser irgend einer beliebigen, als Einheit angenommenen Linie Mx oder My gleich ist und deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte M des Coordinatensystems zusammenfällt, so wird diese Kugelfläche die Ebenen xMy und $x_1 M y_1$ nach den Halbkreisen $AxyA'$ und $ACC'A'$ und die vertikalen Ebenen xMx_1 und yMy_1 nach den Bögen xC und yC' durchschneiden. Es entstehen hiedurch die rechtwinklichen sphärischen Dreiecke AxC und $A'yC'$, in welchem die Hypothenusen h und h' als die Maße der Winkel xMA, yMA' und die Winkel A und A' als die einander gleichen Maße des Flächenwinkels $C(AA')x = 90^0 - \varphi$ bekannt sind.

§. 9.

Es können daher die Katheten $Cx = a$ und $C'y = a'$, ferner $AC = b$ und $A'C' = b_,$ durch die bekannten Formeln der rechtwinklichen sphärischen Dreiecke berechnet werden.

Auf diesem Wege ergeben sich nun folgende Gleichungen:

$\text{Sin } a = \text{Sin } h \,.\, \text{Sin } A$ oder da $A = 90^0 - \varphi$ ist

$\text{Sin } a = \text{Sin } h \,.\, \text{Cos } \varphi \quad (1)$

$\text{Sin } a' = \text{Sin } h' .\, \text{Sin } A'$ oder da $h + h' = 90^0$ und $A' = 90^0 - \varphi$ ist

$\text{Sin } a' = \text{Cos } h .\, \text{Cos } \varphi \quad (2)$

$$\text{Tang } b = \text{Tang } h \,.\, \text{Cos } A = \text{Tang } h \,.\, \text{Sin } \varphi \qquad (3)$$

$$\text{Tang } b' = \text{Tang } h' .\, \text{Cos } A = \text{Tang } h' .\, \text{Sin } \varphi$$

$$= \text{Cot } h .\, \text{Sin } \varphi = \frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Tang } h} \qquad (4)$$

Wenn man in $\frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Tang } h}$ für $\text{Tang } h$ den aus Gleichung (3) hervor=

gehenden Werth $\frac{\text{Tang b}}{\text{Sin } \varphi}$ setzt, so erhält man auch:

$$\text{Tang b}' = \frac{\text{Sin}^2 \varphi}{\text{Tang b}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Ferner ergibt sich aus der Betrachtung der Figur

$$\text{Winkel } x_1 \, M y_1 = 180^0 - (b + b') \qquad (5)$$

$$\text{„} \quad x_1 \, M z_1 = W. \; z_1 \, MA + W. \; AMC = 90^0 + b \quad (6)$$

$$\text{„} \quad y_1 \, M z_1 = W. \; z_1 \, MA' + W. \; AMC = 90^0 + b' \quad (7)$$

Sind die Winkel a und a' berechnet, so ergibt sich:

$$M x_1 = M x \, . \, \text{Cos a}$$

$$M y_1 = M y \, . \, \text{Cos a}'$$

$$M z_1 = M z \, . \, \text{Cos } \varphi$$

Nehmen wir nun $Mx = My = Mz$ an, so werden die Verhältnisse der Projektionen gleicher Theile der drei Coordinatenaxen durch folgende Verhältnißreihen ausgedrückt:

$M x_1 : M y_1 : M z_1 = \text{Cos a} : \text{Cos a}' : \text{Cos } \varphi$ hieraus ergibt sich endlich

$$\frac{M y_1}{M x_1} = \frac{\text{Cos a}'}{\text{Cos a}} \text{ und } \frac{M z_1}{M x_1} \; \frac{\text{Cos } \varphi}{\text{Cos a}};$$

es ist daher, wenn

$\frac{M y_1}{M x_1}$ mit m und $\frac{M z_1}{M x_1}$ mit n bezeichnet wird,

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\text{Cos a}'}{\text{Cos a}} \\ \text{und } n &= \frac{\text{Cos } \varphi}{\text{Cos a}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Durch die 1. und 2. der obigen Gleichungen werden die Winkel bestimmt, welche die ursprünglich horizontalen Coordinatenaxen Mx und My (Fig. 1) nach der Drehung mit der horizontalen Projektionsebene bilden.

Durch die Gleichungen (5), (6) und (7), nebst den Hülfsgleichungen (3) und (4), werden die Winkel bestimmt, welche die Projektionen der Coordinatenaxen unter sich bilden.

Durch die Gleichungen (8) sind endlich die Verhältnisse gegeben, in welchen die Projektionen gleicher Theile der Coordinatenaxen zu einander stehen.

Lösung der zweiten Hauptaufgabe.

§. 10.

Wir gehen nun zur Lösung der zweiten Hauptaufgabe über, indem wir die Verhältnisse der Projektionen gleicher Theile der Coordinatenaxen, nämlich

$\frac{\text{Cos a}'}{\text{Cos a}}$ und $\frac{\text{Cos } \varphi}{\text{Cos a}}$ d. h. die Größen m und n als gegeben betrachten und hieraus die Winkel a, a', φ, b' und b abzuleiten versuchen.

Es sei, wie in §. 8. angenommen wurde,

$$\frac{\text{Cos a}'}{\text{Cos a}} = \text{m und}$$

$$\frac{\text{Cos } \varphi}{\text{Cos a}} = \text{n; hieraus ergibt sich}$$

$$m^2 = \frac{1 - \text{Sin a}'^2}{1 - \text{Sin a}^2} \text{ und } n^2 = \frac{\text{Cos } \varphi^2}{1 - \text{Sin a}^2} \text{ u. folglich } \frac{m^2}{n^2} = \frac{1 - \text{Sin a}'^2}{\text{Cos } \varphi^2}$$

Setzt man für Sin a' den in §. 9 gefundenen Werth (2), nämlich Cos h . Cos φ, so ergibt sich:

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{1 - \text{Cos h}^2 \cdot \text{Cos } \varphi^2}{\text{Cos } \varphi^2} \text{ und hieraus folgt}$$

$$\text{Cos } \varphi^2 = \frac{n^2}{m^2 + n^2 \text{ Cos h}^2} \qquad \text{(A)}$$

Kehren wir nun zu der Gleichung $n^2 = \frac{\text{Cos } \varphi^2}{1 - \text{Sin a}^2}$ zurück und setzen in diese für Sin a den durch die Gleichung (1) in §. 9 gegebenen Werth Sin h . Cos φ, so ergibt sich

$$n^2 = \frac{\text{Cos } \varphi^2}{1 - \text{Sin h}^2 \text{ Cos } \varphi^2} \qquad \text{(B)}$$

Wird in diese Gleichung der so eben erhaltene Werth von Cos φ^2 substituirt, so ergibt sich

$$n^2 = \frac{n^2}{m^2 + n^2 \text{ Cos h}^2} : \left(1 - \text{Sin h}^2 \cdot \frac{n^2}{m^2 + n^2 \text{ Cos h}^2}\right) \text{ oder}$$

$$n^2 = \frac{n^2}{m^2 + n^2 \text{ Cos h}^2} : \frac{m^2 + n^2 \text{ Cos h}^2 - n^2 \text{ Sin h}^2}{m^2 + n^2 \text{ Cos h}^2} \text{ oder}$$

$$n^2 = \frac{n^2}{m^2 + n^2 \operatorname{Cos} h^2 - n^2 \operatorname{Sin} h^2}.$$

Wenn man auf beiden Seiten der Gleichung mit n^2 dividirt und mit dem Nenner multiplizirt, so ergibt sich endlich: $m^2 + n^2 \operatorname{Cos} h^2 - n^2 (1 - \operatorname{Cos} h^2) = 1$, woraus hervorgeht:

$$\operatorname{Cos} h^2 = \frac{1 + n^2 - m^2}{2\, n^2} \quad (C).$$

§. 11.

Werfen wir auf den Gang dieser Untersuchung einen Rückblick, so ergibt sich, daß wir durch Division der Werthe von m^2 und n^2 zunächst eine Gleichung erhalten haben, worin die Größen a', φ, m und n vorkommen; a' wurde sodann durch die Größen h und φ ersetzt und für φ eine Gleichung in h, m und n abgeleitet; dieß ist die Gleichung (A). Nun wurde die gegebene Gleichung von n^2 gleichfalls in eine solche verwandelt, worin nur noch die Größen n, h und φ vorkamen, und so ergab sich die Gleichung (B), die mit (A) kombinirt, zur Elimination der Größe φ und zu einer Endgleichung (I) führte, worin nur noch die Größen h, m und n auftreten.

§. 12.

Aus der Gleichung (C) ergibt sich der Winkel, welchen die Axe Mx mit der Drehungsaxe AA' oder mit der horizontalen Spur der neuen Projektionsebene bildet.

Da nun, wie oben gefunden wurde, $\operatorname{Cos} \varphi^2 = \frac{n^2}{m^2 + n^2 \operatorname{Cos} h^2}$ ist, so ergibt sich, wenn man den Werth von $\operatorname{Cos} h^2$ substituirt:

$$\operatorname{Cos} \varphi^2 = \frac{n^2}{m^2 + \frac{1 + n^2 - m^2}{2}} \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{Cos} \varphi^2 = \frac{2\, n^2}{m^2 + n^2 + 1} \quad (I)$$

Ferner ist $n = \frac{\operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Cos} a}$ also $\operatorname{Cos} a^2 = \frac{\operatorname{Cos} \varphi^2}{n^2}$ oder

$$\operatorname{Cos} a^2 = \frac{2}{m^2 + n^2 + 1} \quad (II)$$

Aus der Gleichung $\text{Cos } a' = m \, . \, \text{Cos } a$ ergibt sich

$$\text{Cos } a'^2 = \frac{2\,m^2}{m^2 + n^2 + 1} \qquad (III)$$

Setzt man in die Gleichung (3) und (4) des §. 9, nämlich in $\text{Tang } b = \text{Tang } h \, . \, \text{Sin } \varphi$ und in

$\text{Tang } b' = (\text{Cot } h \, . \, \text{Sin } \varphi) = \frac{\text{Sin } \varphi}{\text{Tang } h}$ die Werthe von $\text{Sin } \varphi$ und $\text{Tang } h$,*) ausgedrückt durch die Größen m und n, so ergeben sich folgende Gleichungen.

$$\text{Tang } b^2 = \left(\frac{m^2 + n^2 - 1}{1 + n^2 - m^2}\right) . \left(\frac{1 + m^2 - n^2}{m^2 + n^2 + 1}\right) \qquad (IV)$$

$$\text{Tang}' \, b'^2 = \left(\frac{1 + n^2 - m^2}{m^2 + n^2 - 1}\right) . \left(\frac{1 + m^2 - n^2}{m^2 + n^2 + 1}\right) \qquad (V)$$

Da nun
Winkel $x_1 M z_1 = 90^0 + b$ und
" $y_1 M z_1 = 90^0 + b'$
" $x_1 M y_1 = 180^0 - (b + b')$ ist, so lassen sich hieraus, wenn die Winkel b und b' bekannt sind, auch die Winkel $x_1 \; M z_1$ und $y_1 \; M z_1$ herleiten, für deren Tangenten man übrigens sehr leicht besondere Gleichungen erhalten könnte.

Ueber die zweckmäßigste Wahl des Coordinatensystems. Vereinfachung der in §. 9—12 abgeleiteten allgemeinen Grundformeln.

§. 13.

Wir haben in unserer bisherigen Untersuchung zur Erzielung eines möglichst allgemeinen Resultates die Lage des Coordinaten-

*) Die Werthe von $\text{Sin } \varphi$ und $\text{Tang } h$ ergeben sich auf folgende Weise:

$\text{Sin } \varphi^2$ ist $= 1 - \text{Cos } \varphi^2 = 1 - \frac{2\,n^2}{m^2 + n^2 + 1} = \frac{1 + m^2 - n^2}{m^2 + n^2 + 1}$;

$\text{Tang } h^2 = \frac{\text{Sin } h^2}{\text{Cos } h^2} = \frac{1 - \text{Cos } h^2}{\text{Cos } h^2}$ oder da

$\text{Cos } h^2 = \frac{1 + n^2 - m^2}{2\,n^2}$ ist

$\text{Tang } h^2 = \left(1 - \frac{1 + n^2 - m^2}{2\,n^2}\right) : \frac{1 + n^2 - m^2}{2\,n^2}$ oder

$\text{Tang } h^2 = \frac{m^2 + n_2 - 1}{1 + n^2 - m^2}$

systems willkührlich gewählt und daher die Winkel h und h', welche die Coordinatenaxen Mx und My mit der Drehungsaxe AA' bilden, als ungleich betrachtet.

Es ist indessen klar, daß das Resultat durchaus nichts an seiner Allgemeinheit verliert, und die Projektion des gegebenen Körpers auf der verlangten Ebene ganz unverändert bleibt, wenn wir dem Coordinatensystem eine zweckmäßigere Lage zur Drehungsaxe ertheilen, eine solche nämlich, daß die Winkel h und h' einander gleich werden. In der That, man mag mit den Winkeln h und h' jedwelche Aenderung vornehmen, so ändert sich zwar die Stellung des Coordinatensystems, aber die Lage des Körpers, sowie die Lage der Drehungsaxe und die Größe des Drehungswinkels bleiben hiebei unverändert, und es ist also die gesuchte Projektion des Körpers von dem Werthe der Winkel h und h' vollkommen unabhängig. Je mehr daher durch eine zweckmäßige Bestimmung dieser Werthe die obigen Formeln vereinfacht werden, um so brauchbarer und nützlicher müssen dieselben für die Praxis sein.

Wird nun $h = h'$ gesetzt, so muß ein jeder dieser Winkel, weil $h + h' = 90^0$ ist, gleich 45^0 sein, und es verwandeln sich unter dieser Voraussetzung die allgemeinen Gleichungen der vorhergehenden Paragraphen in folgende:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin } a = \text{Sin } 45^0 \text{ Cos } \varphi \\ \text{Sin } a = \text{Cos } 45^0 \text{ Cos } \varphi\end{array}\right\} = \frac{\text{Cos } \varphi}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2} \text{ Cos } \varphi \sqrt{2} \qquad (a)$$

Es ist folglich Winkel a = Winkel a'

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tang } b = \text{Tang } 45^0 \text{ Sin } \varphi = \text{Sin } \varphi \\ \text{Tang } b' = \text{Cot } 45^0 \text{ Sin } \varphi = \text{Sin } \varphi;\end{array}\right. \qquad (b)$$

folglich ist Winkel b = Winkel b'

Ferner ergibt sich: $\angle\, x_1 M y_1 = 180^0 - 2b \qquad (c)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{,, } x_1 M z_1 = 90^0 + b \\ \text{,, } y_1 M z_1 = 90^0 + b\end{array}\right\} \qquad (d)$$

also ist auch $\angle\, x_1 M z_1 = y_1 M z_1$

Für die Verhältnisse der Projektionen $M x_1$ und $M y_1$ (Fig. 2) der als gleich groß angenommenen Theile $M x$ und $M y$ der horizontalen Coordinatenaxen ergibt sich: $M x_1 : M y_1 = \text{Cos } a : \text{Cos } a'$ oder $M x_1 : M x_1 = 1$; es ist also $M x_1 = M y_1 =$ d. h. die Projektionen gleich großer Linien, welche entweder auf den Axen

M x und M y liegen, oder mit diesen parallel sind, sind einander gleich; dagegen ist wie früher:

$$M x_1 : M z_1 = \text{Cos}\, a : \text{Cos}\, \varphi = 1 : \frac{\text{Cos}\, \varphi}{\text{Cos}\, a}$$

Da $\frac{\text{Cos}\, a'}{\text{Cos}\, a} = m$ und $\frac{\text{Cos}\, \varphi}{\text{Cos}\, a} = n$ gesetzt wurde, so ist unter der Voraussetzung, daß $h = h'$ sei

$$\left.\begin{aligned} m &= 1 \\ n &= \frac{\text{Cos}\, \varphi}{\text{Cos}\, a} \end{aligned}\right\} \text{und} \quad (e)$$

Setzt man daher in den Formeln (I), (II), (III), (IV) und (V) des §. 12 für m den Werth 1, so verwandeln sich dieselben in folgende:

$$\text{(VI)} \quad \text{Cos}\, \varphi^2 = \frac{2\, n^2}{n^2 + 2}$$

$$\text{(VII)} \quad \left.\begin{aligned} &\text{Cos}\, a^2 \\ &\text{Cos}\, a'^2 \end{aligned}\right\} = \frac{2}{n^2 + 2}$$

$$\text{(VIII)} \quad \left.\begin{aligned} &\text{Tang}\, b^2 \\ &\text{Tang}\, b'^2 \end{aligned}\right\} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{2 - n^2}{2 + n^2} = \frac{2 - n^2}{2 + n^2}$$

§. 14.

Um die Grenzen zu bestimmen, zwischen welchen die Werthe von n gewählt werden dürfen, bemerke man, daß Cos φ und Cos a die Grenzwerthe von 1 und o nicht überschreiten können. Es ist folglich:

1) Cos φ^2 oder $\frac{2\, n^2}{n^2 + 2} < 1$ und 2) $\frac{2\, n^2}{n^2 + 2} > o$

3) Cos a^2 oder $\frac{2}{n^2 + 2} < 1$ und 4) $\frac{n^2 + 2}{2} > o$

Aus der ersten Bedingungsgleichung ergibt sich:

$2\, n^2 < n^2 + 2$ oder

$n^2 < 2$ oder $n < 1{,}414 \ldots$ d. h., man kann niemals die Bedingung setzen, daß die Projektionen der mit der Axe M z (Fig. 2) parallelen Linien 1,414 . . . mal größer seien, als die Projektionen der mit den horizontalen Axen M x und M y parallelen Linien.

Aus der 3. Bedingungsgleichung ergibt sich:

$2 < n^2 + 2$ eine Beziehung, welche sich von selbst versteht.

Aus der Bedingungsgleichung (2) folgt $n > o$; die Grenzwerthe von n sind also o und 1,414. . . . Für den Grenzwerth $\text{Cos}\,\varphi = o$ ist $\varphi = 90^0$, d. h. die Sehrichtung MN (Fig. 2) fällt mit der Axe Mz zusammen, und die Projektion des Körpers auf der Ebene ABC (Fig. 1) geht in die Horizontalprojektion über. Für den Grenzwerth $\text{Cos}\,\varphi = 1$ wird $\varphi = o^0$, und die Sehrichtung MN steht alsdann auf der Projektionsaxe Mz senkrecht, d. h. sie liegt in der horizontalen Projektionsebene.

Ueber das Wesen der dis-isometrischen oder zweiartig-isometrischen Projektionsmethode. — Weißbachs anisometrische Projektionsmethode und Beweis, daß die hieraus sich ergebenden Projektionen von den dis-isometrischen nicht verschieden, also auch nicht, wie Prof. Weißbach behauptet, schöner, sondern nur schwieriger zu konstruiren sind, als jene.

§. 15.

Da für den Fall, wo $h = h'$ ist, auch $\text{Cos}\,a = \text{Cos}\,a'$ wird, so verwandelt sich, wie wir bereits gesehen haben, die Proportion:

$Mx_1 : My_1 = Mx \,.\, \text{Cos}\,a : My \,.\, \text{Cos}\,a'$ in folgende:

$Mx_1 : My_1 = Mx : My$ und es entsprechen also gleichen Theilen der Coordinatenaxen Mx und My auch gleich große Projektionen oder allgemein: alle auf den Axen Mx und My befindlichen oder mit diesen parallelen Linien werden in demselben Verhältnisse verkürzt.

Denkt man sich nun die Linieneinheit der mit den Axen Mx und My parallelen Coordinaten $\frac{1}{\text{Cos}\,a}$ mal größer, so müssen die Projektionen der durch diese neue Linieneinheit veränderten Coordinaten gleich den ursprünglichen Coordinaten selbst werden; denn setzt man in die Gleichung:

$Mx_1 = Mx \,.\, \text{Cos}\,a$ für Mx den neuen Werth $\frac{1}{\text{Cos}\,a}$ Mx, so ergibt sich $Mx_1 = Mx$

Die Gleichung für die Ordinaten, welche mit Mz parallel sind, oder für die Projektion Mz_1 des Axenstückes Mz, verwandelt sich, da (nach §. 9)

$$Mz_1 = \frac{Mx_1 \cdot \operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Cos} a} \text{ ist, in}$$

$$Mz_1 = \frac{Mx \cdot \operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Cos} a} \text{ oder wenn wir } Mx = Mz \text{ setzen}$$

$$Mz_1 = \frac{Mz \cdot \operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Cos} a} \text{ woraus sich}$$

$$Mz_1 = n \cdot Mz \text{ ergibt.}$$

Es verhält sich also $Mz : Mz_1 = 1 : n$, d. h., die mit der Axe Mz parallelen Ordinaten müssen in dem Verhältnisse von $1 : n$ verändert werden, wenn man ihre auf die neue Linieneinheit $\frac{1}{\operatorname{Cos} a}$ bezogenen Projektionen erhalten will: durch diese Veränderung der Linieneinheit wird nicht nur die Konstruktion der gesuchten Projektion des Körpers außerordentlich erleichtert, sondern die Projektion selbst für die Anwendung in der Praxis um Vieles brauchbarer gemacht, weil alle mit den Linien Mx und My parallelen Ordinaten in ihrer wahren Größe erscheinen, und daher die Zeichnung nicht nur das gewünschte Bild des Körpers gibt, sondern auch allen übrigen Anforderungen des Technikers entspricht.

§. 16.

Diese Projektionsmethode habe ich in meinen frühern Werken mit dem Namen: zweiarig-isometrische Projektionsmethode bezeichnet, weil alle mit den Axen Mx und My parallelen Dimensionen in ihrer wahren Größe erscheinen; kürzer und wohl ebenso bezeichnend, sowie auch gleichartiger zusammengesetzt wäre die Benennung: dis-isometrische Projektionsmethode. Prof. Weißbach hat ihr den Namen: mono-dimetrische (abgekürzt für: mono-dis-isometrische) Projektionsmethode gegeben. Hier ist zugleich der Ort, einen auffallenden Irrthum zu berichtigen, den Hr. Prof. Weißbach in diesen Theil der darstellenden Geometrie eingeführt hat und der sich nur aus der Vernachläßigung einer gründlichen geometrischen Betrachtung erklären läßt. Hr.

Prof. Weißbach spricht nämlich in seiner weiter unten mitgetheilten Abhandlung über denselben Gegenstand die Ansicht aus, daß man, wenn m nicht = 1 gesetzt werde, eine andere und in gewissen Fällen günstigere Projektion erhalte, als unter der Voraussetzung, daß m = 1 sei, und er nennt solche Projektionen anisometrische, weil gleiche Theile der Coordinatenaxen ungleiche Projektionen besitzen; diese Ansicht ist, insofern sie einzig auf die Coordinatenaxen beschränkt wird, richtig, allein durchaus unrichtig, sobald man sie auch auf den zu projicirenden Körper ausdehnt, da, wie wir schon oben bemerkt haben, bei jeder Aenderung der Werthe von h und h′ zwar die Werthe von a und a′, m und n sich ändern, aber die Projektion des Körpers dieselbe bleibt, so lange der Drehungswinkel und die Lage des Körpers zur Drehungsaxe keine Aenderung erleiden.

Der Unterschied zwischen einer dis-isometrischen und zwischen einer an-isometrischen Projektion eines Körpers bei gleichen Werthen von φ beruht also keineswegs in der Gestalt der Projektionen, sondern einzig und allein in der Verschiedenheit der Werthe von m und n, vermöge welcher gewisse Dimensionen der anisometrischen Projektion in einem andern Verhältnisse projizirt werden, als die entsprechenden Dimensionen der dis-isometrischen Projektion. Nur einen einzigen Vorzug besitzt die anisometrische oder die einaxig-isometrische Projektionsmethode, und dieser besteht darin, daß man einen gegebenen Körper nicht nur auf eine beliebige Ebene projiziren oder von jeder gewünschten Seite darstellen, sondern auch noch die Bedingung erfüllen kann: alle mit einer beliebig gewählten, horizontalen Dimension des Körpers parallele Linien in ihrer wahren Länge zu erhalten. Eine Anwendung dieses Falles haben wir in §. 29 ausgeführt.

Umwandlung der Formeln für die dreiaxig-isometrische Projektionsmethode.

§. 17.

Diejenige Projektionsmethode, welche man bisher schlechtweg die „isometrische" nannte, und auf welche Farish zuerst aufmerksam gemacht hat, ist derjenige besondere Fall der dis-isometrischen

Projektionsmethode, in welchem nebst der Verhältnißzahl m auch n = 1 ist. Aus den Bedingungsgleichungen m oder $\frac{\text{Cos a}'}{\text{Cos a}} = 1$

und n oder $\frac{\text{Cos } \varphi}{\text{Cos a}} = 1$

ergibt sich aber sofort die Gleichheit der drei Winkel a, a′ und φ, und hieraus folgt, daß gleiche Linien, welche auf den drei Coordinatenaxen liegen, oder mit diesen parallel sind, auch gleiche Projektionen besitzen müssen. Da nämlich, wie wir oben (§. 13) gesehen haben, die Werthe von n zwischen den Grenzen von O und $\sqrt{2}$ liegen, so kann man diese Verhältnißzahl auch = 1 setzen. Substituirt man nun diesen Werth von n in die Gleichungen (VI), (VII) und (VIII) des §. 13, so ergibt sich

$\text{Cos } \varphi^2 = \frac{2}{3}$ oder $\text{Cos } \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\text{Cos a}^2 = \text{Cos a}'^2 = \frac{2}{3}$ oder $\text{Cos a} = \text{Cos a}' = \sqrt{\frac{2}{3}}$

und es ist also $\varphi = \text{a} = \text{a}' = 35^0\, 16'$

$\text{Tang b}^2 = \text{Tang b}'^2 = \frac{1}{3}$ oder $\text{Tang b} = \text{Tang b}' = \sqrt{\frac{1}{3}}$

woraus sich $\text{b} = \text{b}' = 30^0$ ergibt. Hieraus folgt:

Winkel $x_1 \text{ M } z_1 = 90^0 + \text{b} = 90^0 + 30^0 = 120^0$

" $y_1 \text{ M } z_1 = 90^0 + \text{b}' = 90^0 + 30^0 = 120^0$ und

" $x_1 \text{ M } y_1 = 360 - 240^0 = 120.$

Es schließen also die Projektionen der drei Axen je 2 und 2: Winkel von 120⁰ oder 60⁰ ein, welche, da die Sehne von 60⁰ gleich dem Radius des entsprechenden Kreises ist, sehr leicht konstruirt werden können.

Endlich verhalten sich die Projektionen gleicher Linien auf den drei Axen, zu den Linien selbst, wie 1 zu Cos a oder wie $1 : \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Da nun die Projektionen gleicher Theile der drei Coordinatenaxen gleich groß erscheinen, so können die Projektionen aller zu den Coordinatenaxen parallel gezogenen Linien, wenn man sich letztere auf eine Linieneinheit bezogen denkt, welche $\sqrt{\frac{3}{2}}$mal größer als die ursprüngliche ist, gleich den ursprünglichen Linien selbst angenommen werden. Aus diesem Grunde hat man diese Projektionsmethode die i s o m e t r i s c h e genannt. Wer sich über den Nutzen und die vielfältigen Anwendungen dieser Methode näher unterrichten will, den verweise ich auf meine „I s o m e t r i s c h e

Projektionslehre," sowie auch auf meine deutsche Bearbeitung von Adhemars Lehre des Steinschnittes, besonders aber auf „die neuesten Fortschritte der isometrischen Projektionslehre" im Anhange zu meiner deutschen Bearbeitung von Adhemars darstellender Geometrie, worin sehr einfache Methoden angegeben sind, durch welche die allgemeinen Aufgaben über die gerade Linie, die Ebene und die von Ebenen begrenzten Körper unmittelbar gelöst werden können.

Anwendung der Formeln der dis-isometrischen Projektionsmethode zur Konstruktion der Winkel, welche die Projektionen der drei Coordinatenaxen mit einander bilden.

§. 18.

Wenn aus dem gegebenen Grund- und Aufrisse eines Gebäudes, einer Maschine oder irgend eines andern Körpers die dis-isometrische Projektion desselben konstruirt werden soll, so muß zu diesem Zwecke

a) entweder der Winkel φ und die horizontale Projektion der neuen Projektionsrichtung, oder

b) die Verhältnißzahl n oder (Siehe Fig. 2)

c) die Winkel $x_1 M y_1$, $x^1 M z_1$ und $y_1 M z_1$ gegeben sein, welche die Projektionen der drei Coordinatenaxen mit einander bilden sollen.

Diese drei Fälle, von welchen der erste in der Praxis am häufigsten vorkömmt und daher der wichtigste ist, wollen wir der Reihe nach betrachten.

§. 19.

Erster Fall. Wenn (Fig. 1) die horizontale Projektion NL der Sehrichtung (oder was dasselbe ist, die Lage der Drehungsaxe AA') und der Winkel φ gegeben ist, so muß hieraus 1. der Winkel b und 2. die Verhältnißzahl n bestimmt werden.

1) Der Winkel b ergibt sich aus der Formel (b) §. 13 $\text{Tang}\, b = \text{Sin}\, \varphi$, welche zu folgender Konstruktion führt.

Man beschreibe (Fig. 3) aus dem Scheitel des Winkels amb $= \varphi$ mit beliebigem Radius einen Kreisbogen ab, errichte in a

auf am eine Senkrechte ad und ziehe durch b parallel mit am die Linie bd. Verbindet man sodann die Punkte d und m durch eine Gerade dm, so muß der Winkel dma = b sein.

Denn ad ist = Tang amd und

bc = Sin φ. Da nun nach Konstruktion ad = bc ist, so muß auch Tang amd = Sin φ, also $\sphericalangle$ amd = $\sphericalangle$ b sein. Ist auf diese Weise der Winkel b bestimmt, so ergeben sich die Richtungen der drei Axen (resp. ihrer Projektionen) auf folgende Weise:

Man ziehe (Fig. 4) eine beliebige Vertikale Mz_1, betrachte diese als die vertikale Axe des Coordinatensystems, oder als die Axe der Höhenordinaten und errichte senkrecht auf ihr eine unbestimmte Linie AA', welche die Drehungsaxe bezeichnet. Nun beschreibe man aus dem Punkte M mit beliebigem Radius unterhalb AA' einen Halbkreis und mache die Winkel $A'My_1$ und AMx_1 gleich dem (in Fig. 1) gefundenen Winkel b.

Diese Konstruktion beruht, wie leicht einzusehen, auf den Formeln

$$x_1 M z_1 = 90^0 + b \text{ und}$$

$$y_1 M z_1 = 90^0 + b.$$

2) Um einen Proportionalwinkel zu konstruiren, welcher der Verhältnißzahl $n = \frac{\text{Cos } \varphi}{\text{Cos a}}$ entspricht, in andern Worten, um die mit der vertikalen Axe Mz_1 parallelen Linien in dem Verhältnisse von 1 : n verändern zu können, hat man zunächst den Werth von Cos a zu berechnen. Zu diesem Zwecke bemerke man, daß nach Formel (a) in §. 13

$$\text{Sin a} = \text{Sin } 45^0 \,.\, \text{Cos } \varphi \text{ oder daß}$$

$$1 : \text{Sin } 45^0 = \text{Cos } \varphi : \text{Sin a ist.}$$

Hieraus ergibt sich für die Bestimmung des Winkels a (wenn man die Berechnung von Sin a vermeiden will) folgende Konstruktion:

Man nehme den Bogen af (Fig. 3) = 45°, errichte in a die Senkrechte ag und mache diese = Sin 45°, indem man durch f parallel mit ma die Linie fg zieht. Verbindet man sofort die Punkte m und g durch die Gerade mg und verlängert die Linie bc oder Sin φ nach h, so ergibt sich folgende Proportion:

$$ma : ag = mc : ch \text{ oder}$$
$$1 : \sin 45^0 = \cos \varphi : ch.$$

Es ist also $ch = \sin a$. Wenn man daher durch h parallel mit ma die Linie hi und sodann den Radius mi zieht, so muß

$$\text{Winkel } ami = a \text{ und}$$
$$mk = \cos a \text{ sein.}$$

Um nun hieraus den Proportionalwinkel zu konstruiren, durch welchen irgend eine gegebene Linie in dem Verhältnisse von

$$1 : n \text{ oder von } \cos a : \cos \varphi$$

verändert werden kann, beschreibe man mit $mk = \cos a$ einen unbestimmten Kreisbogen kl, trage auf diesen die Linie $mc = \cos \varphi$ als Sehne nach kl auf und ziehe die Linie ml. Soll nun mittelst des Proportionalwinkels kml eine beliebige Linie, z. B. die mit der Axe Mz parallele Höhenordinate $S's'$ des in (Fig. 1) gegebenen Tetraeders in dem Verhältnisse von 1 : n verändert werden, so beschreibe man mit dieser aus dem Scheitel m einen Kreisbogen rs und greife die Sehne rs ab; diese ist sodann gleich $n \,.\, S's'$ oder es verhält sich

$$S's' : rs = \cos a : \cos \varphi.$$

Die zweiarig-isometrische Projektion des in (Fig. 1) gegebenen Tetraeders wird nun mit Hülfe der in Fig. 3 und 4 ausgeführten Konstruktionen auf folgende Weise gezeichnet: Man trage die auf der Axe Mx (Fig. 1) liegende Ordinate Mb des Punktes Q auf die Projektion Mx_1 (Fig. 4) jener Axe, und ebenso die Ordinaten Ma und Ms auf die Projektion My_1 der Axe My. Diese Uebertragung der Ordinaten beruht auf dem bereits bewiesenen Satze, daß bei der dis-isometrischen Projektionsmethode alle mit den horizontalen Coordinatenaxen parallel gezogenen Linien in ihrer wahren Größe erscheinen müssen. Durch a und s (Figur 4) ziehe man nun parallel mit Mx_1 die Linien aP und sS und mache sie gleich den Ordinaten aP und sS (Figur 1). Ebenso ziehe man durch b (Fig. 4) mit My_1 die parallele Linie bQ und nehme sie gleich der Ordinate bQ in Fig. 1. Verbindet man nun die 4 Punkte M, P, Q, S (Fig. 4) durch die Linien MP, MQ, PQ, SM, SP, SQ, so erhält man die dis-isometrische Projektion von der gegebenen Horizontalprojektion des Tetraeders. Es

ist daher nur noch die Bestimmung der Spitze S′ (Fig. 4) mit Hülfe ihrer Projektion S übrig. Zu diesem Zwecke ziehe man SS′ parallel mit Mz_1, beschreibe mit der Höhenordinate S′t′ (Fig. 1) aus dem Scheitel m des Proportionalwinkels kml (Fig. 3) den Bogen rs und trage die Sehne rs auf SS′ (Fig. 4). Wenn man endlich die Spitze S′ mit den Punkten P, Q, M (Fig. 4) verbindet, so ergibt sich die dis-isometrische Projektion des Tetraeders selbst. Auf gleiche Weise verfährt man in allen übrigen Fällen, wie groß auch die Anzahl der zu bestimmenden Punkte sein mag, d. h., man konstruire zuerst die Horizontalprojektion des Körpers nach der dis-isometrischen Methode und leite aus dieser die dis-isometrischen Projektionen aller über der horizontalen Projektionsebene liegenden Punkte her.

§. 20.

Zweiter Fall. Wenn die Verhältnißzahl n gegeben ist, so kann hieraus auf geometrischem Wege, zunächst der Winkel a, sodann mittelst dieses der Winkel φ und aus diesem wieder, wie bereits in §. 19 gezeigt wurde, der Winkel b hergeleitet werden.

Dividirt man nämlich die Gleichung

$$\text{Sin a} = \text{Sin } 45^0 \text{ Cos } \varphi \quad .\ .\ (a)$$ (Siehe §. 13)

mit der Gleichung

$$n = \frac{\text{Cos } \varphi}{\text{Cos a}}$$ so ergibt sich

$$\frac{\text{Sin a}}{n} = \text{Sin } 45^0 \text{ Cos a}$$ oder

$$\text{Tang a} = n\ .\ \text{Sin } 45^0.$$

Geben wir nun n einen bestimmten Werth, welcher zwischen 1 und $\sqrt{2}$ liegt, z. B. den Werth $\frac{5}{4}$, so wird (wenn man die kürzere Berechnung von Tang a und von $\text{Cos } \varphi = n\ .\ \text{Cos a}$ vermeiden will) der geometrische Werth von Tang a gefunden, wenn man mit einem beliebigen Halbmesser m 4 (Figur 5) einen Kreisbogen konstruirt, welcher $= 45^0$ ist, sodann den Radius, welcher als Linieneinheit betrachtet wird, in 4 gleiche Theile theilt, und endlich mit einem andern Radius m5, der $= \frac{5}{4}$ m a ist, einen zweiten Kreisbogen von 45^0 konstruirt; es ist sodann die Senkrechte

ab oder der Sinus des Bogens a 5 = $\frac{5}{4}$. Sin 45°. Errichtet man daher in 4 eine Tangente 4 a′ und macht diese = b a, so muß der dieser Tangente entsprechende Winkel 4 m a′ gleich dem Winkel a sein, weil

Tang 4 m a′ = m a . Sin 45° = $\frac{5}{4}$ Sin 45 = n . Sin 45° ist.

Hieraus ergibt sich zugleich, daß

$$c d = \text{Sin } a \text{ und } m d = \text{Cos } a \text{ ist.}$$

Da nun ferner

$$n \text{ oder } \frac{5}{4} = \frac{\text{Cos } \varphi}{\text{Cos } a} \text{ ist,}$$

so trage man die Linie m d = Cos a auf den Radius m n nach m d′, verbinde den Punkt 4 mit d′ und ziehe parallel mit 4 d′ die Linie 5 e′, wodurch sich

$$\text{Cos } \varphi = m e'$$

ergibt, weil m e′ : (m d′ = Cos a) = m 5 : m 4
= 5 : 4 ist.

Errichtet man endlich in e′ die Senkrechte e′ f′ und zieht den Radius m f′, so ist

$$< f' m n = \varphi$$

und aus diesem ergibt sich auf die früher erläuterte Weise, indem man in n die Tangente n g′ konstruirt und durch f′ die Linie f′ g′ parallel mit m n zieht, auch der Winkel g′ m n = b.

Der Proportionalwinkel, welcher der Verhältnißzahl n entspricht und zur Veränderung der mit der vertikalen Coordinatenaxe parallelen Ordinaten im Verhältnisse von 1 : n benützt werden soll, wird dadurch konstruirt, daß man mit m 4 (Fig. 5) einen unbestimmten Kreisbogen beschreibt und auf diesem die Linie m 5 als Sehne von 4 nach l aufträgt, wodurch der Winkel 4 m l bestimmt wird.

§. 21.

Dritter Fall. Wenn die Winkel $x_1 M y_1$, $x_1 M z_1$ und $y_1 M z_1$ (Fig. 4) gegeben sind, welche die Projektionen der Coordinatenaxen mit einander bilden sollen, so leite man hieraus zunächst den Winkel b her, welcher = A M x_1 oder = A′ M y_1 ist.

Durch den Winkel b = n m g′ (Fig. 5) läßt sich sodann der Winkel φ = f′ m n und durch den Winkel φ, wie in §. 19 und

durch Fig. 3 gezeigt wurde, die Verhältnißzahl $n = \frac{\mathrm{Cos}\ \varphi}{\mathrm{Cos}\ a}$ oder der diesem Verhältnisse entsprechende Proportionalwinkel k m l (Fig. 3) konstruiren.

Herleitung der dis-isometrischen Größen φ, n und b, aus geometrischen Betrachtungen.

§. 22.

So einfach die aus den algebraischen Werthen der Größen a, φ, b und n hergeleiteten Konstruktionen auch sein mögen, so stehen sie dennoch besonders in der praktischen Anwendung denjenigen nach, welche auf einer zusammenhängenden geometrischen Anschauung beruhen; denn hat man diese Anschauung nur ein einziges Mal mit Aufmerksamkeit vollzogen, so ist dieselbe ein bleibendes Eigenthum unseres Geistes und nicht bloß unserer Gedächtnißkraft geworden, während die Anwendung der obigen Konstruktionen stets Gedächtnißsache bleibt, da ihr innerer Zusammenhang zwar durch die analytischen Formeln, auf welchen sie beruhen, bedingt, aber auch eben deßwegen verhüllt ist.

Obgleich ich bereits in frühern Werken die auf geometrischen Betrachtungen beruhenden Konstruktionsweisen ausführlich entwickelt habe, so glaube ich dieselben dennoch auch in diesem Werkchen sowohl der Vollständigkeit wegen, als auch behufs einer Vergleichung der beiderseitigen Methoden, aufnehmen zu sollen.

§. 23.

Es seien Mx, My und (M, M′z′) in Fig. 6 die Axen des Coordinatensystems, von welchem diejenige Ebene, welche die Axen Mx und My enthält, mit der horizontalen Projektionsebene zusammenfalle.

Gibt man nun der vertikalen Projektionsebene eine solche Lage, daß sie mit der gegebenen Projektionsrichtung (NM, N′M′) parallel ist, so muß der Winkel N′M′x′, welchen die vertikale Projektion dieser Richtung mit der neuen Projektionsaxe bildet, = φ sein. Dreht man sofort die Ebene xMy so weit um die auf NM senkrecht stehende Drehungsaxe MM′, bis die Linie (NM, N′M′) auf der

horizontalen Projektionsebene senkrecht steht, so wird nun die Ebene xMy die neue Lage $M'x'_1$ annehmen, welche dadurch bestimmt wird, daß man den Winkel $N'_1 M'x'_1$ = Winkel $N'M'x'$ macht, oder auch, indem man das Dreieck $N'_1 M'_1 x'_1$ konstruirt, welches mit dem Dreiecke $N'M'x'$ kongruent ist. Die auf $M'x'_1$ senkrecht stehende Linie $M'z'_1$ bestimmt alsdann die neue Lage der Coordinatenaxe $(M, M'z')$ und die Linien Mx_1, My_1 und Mz_1, welche die horizontalen Projektionen der ursprünglich gleich groß angenommenen Linien Mx, My und $M'z'_1$ sind, bilden, wie leicht einzusehen, die gesuchten Projektionen gleicher Theile der drei Axen des gegebenen Coordinatensystems. Es ist daher nur noch die Verhältnißzahl n oder der dieser Zahl entsprechende Proportionalwinkel zu konstruiren, durch welchen die mit der Axe $(M, M'z')$ parallelen Ordinaten in dem Verhältnisse von $\text{Cos } a : \text{Cos } \varphi$ verändert werden müssen, wenn die auf den Axen Mx_1 und My_1 befindlichen, oder zu diesen Axen parallelen Linien, in ihren wahren Längen erhalten werden sollen.

Zu diesem Zwecke trage man die Linie Mx nach Mx_2, ziehe die Verbindungslinie $x_1 z_1$ und parallel mit dieser die Linie $x_2 z_2$. Es verhält sich alsdann

$$Mx_1 : Mx_2 = Mz_1 : Mz_2 \text{ oder}$$

da $Mx_1 = Mx \,.\, \text{Cos } a$, $Mx_2 = Mx$ und

$Mz_1 = M'z'_1 \,.\, \text{Cos } \varphi =$ ist, so verhält sich auch:

$$Mx \,.\, \text{Cos } a : Mx = M'z'_1 \text{ Cos } \varphi : Mz_2, \text{ also ist:}$$

$$Mz_2 = \frac{M'z'_1 \text{ Cos } \varphi}{\text{Cos } a} \text{ oder}$$

$$M'z'_1 : Mz_2 = \text{Cos } a : \text{Cos } \varphi \,. = 1 : n.$$

Beschreibt man daher mit $M'z'_1 = Mx = My$ einen Kreisbogen ab (Fig. 7) und trägt auf diesen die Linie Mz_2 als Sehne auf, so muß der Winkel asb der gesuchte Proportionalwinkel sein.

Ist statt des Winkels φ die Verhältnißzahl n gegeben, so empfehle ich die in §. 20 angezeigte Konstruktion.

Ist endlich der Winkel $x_1 M y_1$ (Fig 6) gegeben, welchen die Projektionen der Coordinatenaxen Mx und My mit einander bilden, so nehme man $Mx_1 = My_1$, halbire den Winkel $x_1 M y_1$ durch die Linie MN und konstruire die Winkel NMx und $NMy = 45^0$.

Alsdann bestimme man die Punkte x und y, indem man durch x_1 und y_1 parallel mit der Halbirungslinie NM des Winkels xMy die Linien $x_1 x$ und $y_1 y$ zieht.

Man fälle sodann aus x oder y eine Senkrechte auf die mit MN parallele Projektionsaxe, bestimme x' und beschreibe mit M'x' einen Kreisbogen, den man so weit verlängert, bis er die Projizirende der Punkte x_1 und y_1 in dem Punkte x'_1 schneidet. Zieht man endlich die Linie $M'x'_1$, so wird hiedurch sowohl der Winkel $x'_1 M' N'_1 = \varphi$ als auch die entsprechende Richtung $M'z'_1$ der Axe (M, M'z') bestimmt, und es kann nun hieraus der Proportionalwinkel wie oben abgeleitet werden.

Untersuchungen über die Abhängigkeit zwischen der Verhältnißzahl n und den Winkeln φ und $x_1 M y_1$, sowie über die zweckmäßigste Wahl der Werthe von n.

§. 24.

Um die Abhängigkeit der Verhältnißzahl n und der Winkel φ und $x_1 M y_1$ im Allgemeinen zu bestimmen, bemerke man, daß die Formel (VIII) in §. 13, nämlich:

$$\text{Tang } b^2 = \frac{2 - n^2}{2 + n^2} \text{ für } n = 1 \text{ in}$$

$$\text{Tang } b = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \text{ übergeht, woraus sich}$$

$$< b = 30^0 \text{ und}$$

$$\text{W. } x_1 M y_1 = 180 - 2 \times 30 = 120^0 \text{ ergibt.}$$

Wird nun n größer als 1, so wird auch n^2 größer als 1, folglich der Zähler des Werthes von b kleiner und der Nenner größer, also der Werth von Tang b kleiner als $\sqrt{\frac{1}{3}}$, folglich auch $b < 30^0$ und W. $x_1 M y_1 > 180^0 - 2.30^0$ oder $> 120^0$.

Nehmen wir für n den größtmöglichen Werth, nämlich $\sqrt{2}$ an, so ist

$$\text{Tang } b^2 = \frac{2 - 2}{2 + 2} = o, \text{ also auch } b = o \text{ und}$$

$$< x_1 M y_1 = 180^0.$$

Setzt man aber $n < 1$, so ist auch $n^2 < 1$ und der Zähler des

Werthes von b wird nun größer als 1, während der Nenner kleiner als 3 wird. Es ist folglich

$\text{Tang } b > \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ und $b > 30^0$, also

$W.\ x_1 M y_1 < 180 - 2.30$ oder $< 120^0$.

Die Formel (VI) in §. 13, nämlich:

$\text{Cos } \varphi^2 = \frac{2\,n^2}{2n + {}^2}$ gibt für $n = 1$

$\text{Cos } \varphi^2 = \tfrac{2}{3}$ oder $\text{Cos } \varphi = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, woraus

$\varphi = 35^0\ 16'$ folgt.

Ist $n = 1 + d$, wo d einen Decimalbruch bedeutet, welcher nahezu kleiner als 0,4 oder streng genommen $< \sqrt{2} - 1$ ist, weil n niemals $= \sqrt{2}$ werden darf, so ergibt sich

$$\text{Cos } \varphi^2 = \frac{2 + 4\,d + 2\,d^2}{3 + 2\,d + d^2}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit

$\text{Cos } \varphi^2 = \tfrac{2}{3}$, so sieht man, daß der Zähler, wenn $n > 1$ gesetzt wird, um $4\,d + 2\,d^2$, der Nenner aber nur um $2\,d + d^2$ wächst. Es wird also für diesen Fall $\text{Cos } \varphi^2 > \tfrac{2}{3}$ und folglich

Winkel $\varphi < 35^0\,16'$.

Setzt man dagegen $n = 1 - d'$, wo d' einen beliebigen Decimalbruch bezeichnet, so ist:

$$\text{Cos } \varphi^2 = \frac{2 - 4\,d' + 2\,d'^2}{3 - 2\,d' + d'^2} = \frac{2 - 2\,(2\,d' - d'^2)}{3 - (2\,d' - d'^2)}$$ und

es nimmt also der Zähler des Bruches $\tfrac{2}{3}$ um eine doppelt so große Größe ab als der Nenner; in diesem Falle wird also der Werth des Bruches kleiner, als er vorher war, folglich ist

$\text{Cos } \varphi^2 < \tfrac{2}{3}$ und $\varphi > 35^0\,16'$.

Es ergeben sich also zwischen der Größe n und den Winkeln φ und $x_1 M y_1$ folgende bemerkenswerthe Beziehungen, welche wir der Uebersichtlichkeit wegen zusammenstellen wollen.

Für $n = 0$	ist Winkel $x_1 M y_1 = 90^0$	und Winkel	$\varphi = 90^0$
„ $n < 1$	„ „ $x_1 M y_1 < 120^0$	„ „	$\varphi > 35^0 16'$
„ $n = 1$	„ „ $x_1 M y_1 = 120^0$	„ „	$\varphi = 35^0 16'$
„ $n > 1$ bis zu $\sqrt{2}$	ist $x_1 M y_1 > 120^0$	„ „	$\varphi < 35^0 16'$
„ $n = \sqrt{2}$	„ „ $x_1 M y_1 = 180^0$	„ „	$\varphi = 0^0$

Da Herr Professor Weißbach in seiner Abhandlung über die „anisometrische und mono-dimetrische Projektionen" die irrthümliche Ansicht ausspricht, man erhalte, wenn $n = \frac{1}{3}$ oder $= \frac{1}{4}$ gesetzt werde, die gefälligsten und besonders für Krystallformen geeignete Projektionen, so glaube ich diesen Irrthum hier berichtigen zu müssen. Schon die gemeine isometrische Projektionsmethode, welche den Werthen $n = 1$ und $\varphi = 35^0 16'$ entspricht, gibt häufig sehr ungefällige Zeichnungen, weil der Winkel φ zu groß ist. Aeußerst unnatürlich und gleichsam zusammen gestaucht würden aber die Projektionen werden, wenn $n = \frac{1}{3}$ oder $n = \frac{1}{4}$ gesetzt würde; denn im ersten Falle ergäbe sich $\varphi = 71^0 4'$ und im andern Falle ergäbe sich $\varphi = 75^0 45'$; es würde also der Körper fast in senkrechter Richtung von oben betrachtet werden, woraus nothwendig ein schlechtes Bild hervorgehen müßte.

Zweiter Theil.

Anwendung der allgemeinen Formeln auf das technische Zeichnen.

Berechnung einer beim technischen Zeichnen nützlichen Tabelle, welche die gleichzeitigen Werthe der Größen n, b, $x_1 M y_1$ und φ enthält.

§. 24.

Da Schnelligkeit und Leichtigkeit der Bestimmungsmethode der Winkel b; $x_1 M y_1$ und der Größe n, für die nützliche Anwendung der dis-isometrischen Projektionsmethode beim technischen Zeichnen sehr wesentlich sind, so halte ich die Mittheilung der folgenden Tabelle für zweckmäßig.

Bei der Berechnung derselben habe ich die Werthe des Winkels b zu Grunde gelegt, weil vorzüglich dieser Winkel schnell und richtig konstruirt werden soll. In den isometrischen Projektionen ist der Winkel b, wie bereits erwähnt wurde, $= 30^0$ und wird am

einfachsten dadurch erhalten, daß man (Figur 8) einen Kreis beschreibt, in diesem zwei senkrecht aufeinanderstehende Durchmesser ab und cd konstruirt, sodann in dem untern Endpunkte d des vertikalen Durchmessers mit dem Radius des Kreises einen Kreisbogen beschreibt, welcher den Kreis in zwei Punkten f und f′ durchschneidet; es sind alsdann die Bögen df und df′ = 60° und die Bögen af und bf′ = 30°.

Diesen Winkel kann man nun mit leichter Mühe und sehr genau in 2, 3, 4 oder 6 gleiche Theile theilen, und es ergeben sich aus diesen Eintheilungen eben so viele entsprechende Werthe, welche gleich b gesetzt werden können.

Bei der Theilung des Winkels von 30° in 4 gleiche Theile ergeben sich für b die Werthe von 7°30′, 15° und 22°30′. Bei einer Theilung in 6 gleiche Theile hingegen ergeben sich für b die Werthe von 5°, 10°, 15°, 20° und 25° und diese Werthe möchten wohl alle für das technische Zeichnen anwendbare Fälle einschließen, weil kleinere Winkel als 10° in keinem Falle anzurathen sein möchten, und die von den obigen abweichenden Werthe des Winkels b in der Form der Zeichnung nur unbedeutende Differenzen hervorbringen. Ich habe aus diesem Grunde die folgende Tabelle nur auf diejenigen Werthe von b ausgedehnt, welche zwischen den Grenzwerthen 10° und 25° liegen.

Die Formeln, welche der Berechnung dieser Tafel zu Grunde liegen, sind:

$$\angle x^1 M y^1 = 180^0 - 2b \quad \text{. . (Gleichung (c) in §. 13.)}$$

$$\mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{Tang}\,b \quad \text{. . (Gleichung (b) in §. 13.)}$$

$$\mathrm{Sin}\,a = \mathrm{Sin}\,45^0\,\mathrm{Cos}\,\varphi \quad \text{(Gleichung (a) in §. 13.)}$$

$$n = \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,a} \quad \text{. . . . . (Gleichung (e) in §. 13.)}$$

Hülfstafel zur Konstruktion der dis-isometrischen Projektionen.

Werthe von b	Werthe von $x_1 M y_1$	Werthe von φ	Werthe von a	Werthe von n
10°	160°	10°9′	44°11′	1,38
15°	150°	15°33′	42°56′	1,32
20°	140°	21°21′	41°12′	1,24
22° 30′	135°	24°28′	40°4′	1,19
25°	130°	27°48′	38°43′	1,13

§. 26.

Um die Proportionalwinkel (Fig. 12) zu konstruiren, welche den verschiedenen Werthen von n entsprechen, bediene man sich irgend eines 100theiligen Transversalmaßstabes (Fig. 11), beschreibe mit einer Linie = 100 einen unbestimmten Kreisbogen (Fig. 12), nehme sodann irgend einen, dem Werthe von b entsprechenden Werth von n, welchen man, nachdem man ihn mit 100 multiplizirt hat, von dem Maßstabe abgreift, in den Zirkel und trage diesen als Sehne auf den beschriebenen Bogen auf. Die beiden Radien, welche aus dem Mittelpunkte des Kreisbogens zu den Endpunkten der Sehne gezogen werden, schließen den gesuchten Proportionalwinkel ein.

Auflösung eines gegebenen Beispieles für die verschiedenen, in der Tafel des vorhergehenden Paragraphen berechneten Werthe von b und n. Anführung einiger praktischen Regeln für technische Zeichner.

§. 27.

Wir wollen nun mit Hülfe der obigen Tafel die dis-isometrischen Projektionen eines gegebenen Körpers konstruiren, welche den verschiedenen Werthen von n und b entsprechen, um dem

technischen Zeichner die aus diesen Werthen hervorgehenden Resultate an einem Beispiele vor Augen zu stellen, damit er in den Stand gesetzt ist, bei vorkommenden komplizirtern Fällen unter den Werthen von b und n die zweckmäßigste Wahl zu treffen.

Als Beispiel wählte ich einen Körper, welcher die Gestalt eines Kreuzes besitzt und dessen Horizontal- und Vertikalprojektion in Fig. 9 gegeben sind. Die horizontale Projektion NM der neuen Projektions- oder Sehrichtung habe ich so gewählt, daß die vordere Fläche des Körpers mit der Drehungsaxe AA′ einen kleinern Winkel bildet, als die Seitenflächen, damit sich die erstere in der dis-isometrischen Projektion verhältnißmäßig größer darstellt, als die letztere.

Im Allgemeinen hat der technische Zeichner bei der Wahl der Drehungsaxe zunächst ins Auge zu fassen, von welcher Seite er den Körper vorzüglich darzustellen wünscht; denn hierdurch allein kann die Lage der Drehungsaxe zweckmäßig bestimmt und das gewünschte Bild des Körpers erhalten werden.

Hat man sich für die Lage der Drehungsaxe entschieden, so werden durch einen beliebigen Punkt M derselben zwei Linien Mx und My konstruirt, welche mit der Drehungsaxe die Winkel von 45° einschließen. Diese Linien können als die zwei horizontalen Axen des neuen Coordinatensystems betrachtet werden, auf welche der Körper bezogen werden muß, wenn man seine dis-isometrische Projektion erhalten will. Um aber die Ausführung der dis-isometrischen Projektion möglichst zu erleichtern, umgebe man die horizontale Projektion des Körpers mit einem Rechtecke OPQR, dessen Seiten mit den Coordinatenaxen Mx und My parallel sind und daher diese Axen selbst ersetzen; endlich werden aus denjenigen Punkten 3—4—5—6 der horizontalen Projektion des Körpers, welche innerhalb des Rechteckes liegen, senkrechte Linien auf eine beliebige Seite OP des Rechteckes gefällt, und die Fußpunkte der Senkrechten genau bemerkt. Diese Operation ist stets in gleicher Weise auszuführen, welches auch die Werthe von n und b sein mögen.

Sofort geht man zu der Konstruktion der Projektionen der drei Coordinatenaxen und zur Konstruktion des Proportionalwinkels

über, welcher dem speziellen Werthe von n entspricht. Zum leichteren Verhältnisse wollen wir nun den ersten unter den verschiedenen Fällen, die wir in der obigen Tafel angenommen, etwas ausführlicher betrachten.

§. 28.

Konstruktion der dis-isometrischen Projektion, welche den Werthen b = 10° und n = 1,38 entspricht.

Man ziehe (Fig. 10) eine Vertikale Oz_1, welche die Projektion der Axe M′z′ (Fig. 9) bezeichnet, und errichte senkrecht auf dieser eine Linie AA′, welche als die Drehungsaxe des Coordinatensystems zu betrachten ist. Unterhalb dieser Linie beschreibe man mit beliebigem Radius einen Halbkreis, und schneide sodann aus dem Punkte m mit dem Halbmesser des Kreises die Bögen mn und mn′ ab. Dadurch ergeben sich die Bögen An und A′n′ = 30°.

Nimmt man nun Ax_1 und $A'y_1$ = dem dritten Theile der Bögen An und A′n′, so ergeben sich die Linien Ox_1 und Oy_1 als die dis-isometrischen Projektionen der beiden Axen Mx und My (Fig. 9).

Nun gehe man zu der Konstruktion der dis-isometrischen Horizontalprojektion des darzustellenden Körpers über. Zu diesem Zwecke trage man die Seiten OP und OR des Rechteckes in Fig. 9 auf die Axen Oy_1 und Ox_1 (Fig. 10) und konstruire das Parallelogramm OPQR, welches die dis-isometrische Projektion der Horizontalprojektion des Körpers einschließen muß; man trage nun die Linien O—1, OM, R—7 und P—2 aus (Fig. 9) nach O—1, OM, R—7 und P—2 in Fig. 10 über und ziehe das Parallelogramm M — 1 — 2 — 7 — M, welches die ganze dis-isometrische Horizontalprojektion des Körpers einschließt. Wie nun ferner auch die Punkte 3, 4 ꝛc. in Fig. 10 bestimmt werden, ergibt sich aus der Betrachtung der Figuren 9 und 10 sehr leicht von selbst. Denn O—4′ und O—3′ (Fig. 10) sind zugleich O—4′ und O—3′ (Fig. 9); 4—4′ und 3—3′ (Fig. 10) sind parallel mit Ox_1 und gleich 4—4′ und 3—3′ in Fig. 9.

Werden die zuletzt erhaltenen Punkte 3, 4, 5 und 6 . . . gleichfalls durch entsprechende punktirte Linien verbunden, so ergibt sich die dis-isometrische Horizontalprojektion des Körpers.

Bei dieser, sowie bei allen ähnlichen Konstruktionen hat man wohl zu bemerken, welche Punkte eine symetrische Lage besitzen und welche Linien parallel und gleich sind, weil in diesem Falle auch die Projektionen der Punkte und Linien symetrisch, sowie parallel und gleich werden und dadurch die Konstruktionen sehr vereinfacht werden können.

Aus der dis-isometrischen Horizontalprojektion läßt sich nun sehr leicht die dis-isometrische Projektion selbst herleiten, indem man durch alle Punkte, welche über der horizontalen Projektionsebene liegen, parallele Linien mit der Coordinatenare $o\,z_1$ zieht und diese durch den Proportionalwinkel (Fig. 12), welcher dem Werthe $n = 1{,}38$ entspricht, in dem Verhältnisse von 1 : 1,38 oder von 100 : 138 verändert. Um also z. B. den Punkt 2′ (Fig. 10) zu erhalten, welcher die dis-isometrische Projektion des Punktes (2,2′) (Figur 9) bildet, beschreibe man mit der Höhe des Punktes 2′ (Fig. 9) aus dem Scheitel des Proportionalwinkels (Figur 12) einen Kreisbogen 2—2, nehme die entsprechende Sehne in den Zirkel und trage dieselbe auf die durch 2 (Fig. 10) gehende Ordinate nach 2—2′.

§. 29.

Auf gleiche Weise ergeben sich alle übrigen Punkte der dis-isometrischen Projektion des Körpers. Die Figuren 13, 14, 15 und 16 stellen die dis-isometrischen Projektionen desselben Körpers dar, welche den Werthen

$b = 15^0, 20^0, 22^0 30', 25^0$ und

$n = 1{,}32;\ 1{,}24;\ 1{,}19$ und $1{,}13$ entsprechen.

Aus dem Anblicke derselben ergibt sich, daß die in Fig. 10 und 13 nach den Werthen $b = 10^0$ und 15^0 und $n = 1{,}38$ und $1{,}32$ ausgeführten Projektionen des Körpers die gefälligsten Formen besitzen, und ich rathe daher, den Winkel b nicht größer als 15^0 und nicht kleiner als 10^0 anzunehmen.

§. 30.

Ueber die Bestimmung der wahren Größe irgend einer in einer dis-isometrischen Projektion vorkommenden Linie.

Will man in einer gegebenen dis-isometrischen Projektion (Fig. 10) die wahre Entfernung irgend zweier Punkte U und S bestimmen, so suche man zuerst die dis-isometrischen Horizontalprojektionen 4 und 5 dieser Punkte auf, ziehe sodann die beiden Axen O x_1 und O y_1, deren Richtungen in jeder dis-isometrischen Zeichnung angegeben sein sollen, und ziehe endlich parallel mit diesen durch die Punkte 4 und 5 die Linien 4 t und 5 t, welche das dis-isometrisch-rechtwinkliche Dreieck 4 5 t bestimmen, dessen Seiten 4 t und 5 t die wahre Länge derjenigen Linien besitzen, deren Projektionen sie sind. Hieraus ergibt sich das rechtwinkliche Dreieck 4 — 5 — t Fig. 10a, worin 4 t und 5 t gleich 4 t und 5 t (Fig. 10) sind, und die Linie 4 — 5 die wahre Länge von 4 — 5 oder von U s in Fig. 10 bestimmt.

Nun konstruire man auch das dis-isometrische rechtwinkliche Dreieck S s U in seiner wahren Gestalt, indem man zuerst die Linie S s in dem Verhältnisse von n : 1 oder von 138 : 100 mittelst eines zu diesem Zwecke besonders konstruirten Proportionalwinkels (Fig. 10c) verändert. Dieser Proportionalwinkel ergab sich in vorliegendem Falle dadurch, daß man aus M mit einer Oeffnung M a, welche = 138 Linieneinheiten ist, einen Bogen a b beschrieb, auf diesen eine Länge a b = 100 Linieneinheiten als Sehne auftrug und die Halbmesser M a und M b zog. Beschreibt man nun aus M mit S s (Figur 10) den Bogen s s, so ist die Sehne desselben die wahre Größe von S s (Fig. 10), und man kann nun mittelst der Linien 4 — 5 (Fig. 10 a) und s s (Fig. 10 c) das rechtwinkliche Dreieck S s U (Fig. 10 b) konstruiren, dessen Hypothenuse S U die wahre Größe der Linie S U in Fig. 10 bestimmt.

§. 31.

Ueber die Anwendung der mono-isometrischen Projektionsmethode für besondere Zwecke des technischen Zeichnens.

Aus den in Fig. 10, 13, 14, 15 und 16 dargestellten dis-isometrischen Projektionen des in Figur 9 gegebenen Körpers können zwar alle gewünschten Dimensionen mit leichter Mühe auf die in dem vorhergehenden Paragraphen gezeigte Weise ihrer wahren Größe nach bestimmt werden; dennoch aber könnte es in gewissen Fällen wünschenswerth erscheinen, daß bei einer gegebenen Projektionsrichtung alle diejenigen Linien, welche mit einer bestimmten Hauptrichtung des Körpers, z. B. mit der Seite M — 7 (Figur 9) parallel sind, in den Projektionen ihre ursprüngliche Länge beibehalten.

In diesem Falle wird man entweder zu der weiter unten angegebenen Hülfskonstruktion schreiten, oder aber zu den in §. 11 hergeleiteten allgemeinen Formeln der mono-isometrischen Projektionsmethode zurückkehren. Denn weil nun eine der beiden Coordinatenaxen Mx und My (Fig. 1) mit derjenigen Dimension des Körpers, welche in ihrer wahren Größe erscheinen soll, entweder zusammenfallen oder mit ihr parallel sein muß, so werden auch die Winkel xMC und yMB in den meisten Fällen verschieden sein, und es müssen folglich auch die Projektionen dieser Winkel verschiedene Werthe besitzen. Auch wird nun die Verhältnißzahl m nicht mehr gleich 1 sein, sondern einen entsprechenden andern Werth erhalten, der unmittelbar durch die Winkel a und a′ und mittelbar durch die Winkel h und φ bedingt ist. Siehe die Gleichungen (1), (2) und (8) in §. 9.)

Für technische Zeichner habe ich folgende Tabelle entworfen, wovon ich jedoch nur denjenigen Theil berechnet habe, welcher dem am meisten anzuempfehlenden Werthe von φ entspricht; die leeren Stellen kann sich Jeder nach Bedürfniß und Bequemlichkeit selbst ausfüllen, da die Berechnung sehr leicht ist.

Tafel zur mono-isometrischen Projektions-Methode.

Gegeben.			Gesucht. Siehe §. 9. Gleichung: (3) (4) (8)					
φ	h	h′	Tang b	Tang b′	m	n	$\frac{1}{m}$	$\frac{n}{m}$
10°	10°	80°	.	.	.	.	.	.
	15°	75°	.	.	.	.	.	.
	20°	70°	.	.	.	.	.	.
	25°	65°	.	.	.	.	.	.
	30°	60°	.	.	.	.	.	.
	35°	55°	.	.	.	.	.	.
	40°	50°	.	.	.	.	.	.
	45°	45°	.	.	.	.	.	.
15°	10°	80°	0,046	1,468	0,313	0,980	3,196	3,131
	15°	75°	0,069	0,966	0,372	0,998	2,690	2,683
	20°	70°	0,094	0,711	0,445	1,023	2,249	2,301
	25°	65°	0,121	0,555	0,529	1,058	1,889	1,999
	30°	60°	0,149	0,448	0,626	1,103	1,598	1,762
	35°	55°	0,181	0,370	0,734	1,160	1,362	1,580
	40°	50°	0,217	0,308	0,858	1,232	1,165	1,436
	45°	45°	0,259	0,259	1	1,323	1	1,323
20°	10°	80°	.	.	.	.	.	.
	15°	75°	.	.	.	.	.	.
	20°	70°	.	.	.	.	.	.
	25°	65°	.	.	.	.	.	.
	30°	60°	.	.	.	.	.	.
	35°	55°	.	.	.	.	.	.
	40°	50°	.	.	.	.	.	.
	45°	45°	.	.	.	.	.	.
25°	10°	80°	.	.	.	.	.	.
	15°	75°	.	.	.	.	.	.
	20°	70°	.	.	.	.	.	.
	25°	65°	.	.	.	.	.	.
	30°	40°	.	.	.	.	.	.
	35°	55°	.	.	.	.	.	.
	40°	50°	.	.	.	.	.	.
	45°	45°	.	.	.	.	.	.

§. 32.

Ueber die Einrichtung und den Gebrauch dieser Tafel ist nur wenig zu bemerken.

Die erste Kolumne enthält den Winkel, welchen die neue Projektionsrichtung mit der horizontalen Projektionsebene bilden soll.

Die zweite Kolumne enthält den Winkel h, welchen die Coordinatenaxe M x (Fig. 1 und 2) mit der Drehungsaxe B C oder A A′ bildet.

Die dritte Kolumne enthält den Winkel h′, welchen die Coordinatenaxe M y (Fig. 1 und 2) mit der Drehungsaxe A A′ bildet. Die Winkel h′ ergänzen die Winkel h zu 90°.

Wenn der Winkel, den die Axe M x mit der Drehungsaxe AA′ bilden soll, größer als 45° ist, so denke man sich die Namen der Axen vertauscht, betrachte also M x als M y und umgekehrt.

Die vierte Kolumne enthält die Tangenten des Winkels b, welchen die Projektion der Axe M x mit der Projektion der Drehungsaxe bildet.

Die fünfte Kolumne enthält die Tangenten des Winkels b, welchen die Projektion der Axe M y mit der Projektion der Drehungsaxe bildet.

Die sechste Kolumne enthält die Werthe der Verhältnißzahl $m = \frac{\text{Cos a}'}{\text{Cos a}}$, welche der Voraussetzung entsprechen, daß für die Projektionen der mit der Axe M x parallelen Linien die wahren Längen dieser Linien beibehalten werden sollen. Man denkt sich also statt der ursprünglichen Linieneinheit eine neue, welche gleich der Größe $\frac{1}{\text{Cos a}}$ ist. Da nämlich (Figur 2) $M x_1 : M x = \text{Cos a} : 1$, also $M x_1 = M x \,.\, \text{Cos a}$ ist, so muß, wenn $M x_1$ in M x übergehen soll, statt der Linie M x die Linie $\frac{M x}{\text{Cos a}}$ gedacht oder die Einheit, auf welche die Linie M x bezogen ist, durch die neue Einheit $\frac{1}{\text{Cos a}}$ ersetzt werden; denn $M x_1 \,.\, \frac{1}{\text{Cos a}}$ ist alsdann $= M x \,.\, \text{Cos a} \,.\, \frac{1}{\text{Cos a}} = M x$. Auf diese Einheit $\frac{1}{\text{Cos a}}$ müssen aber auch die mit

den zwei andern Coordinatenaxen parallelen Linien bezogen werden. Nun ist aber (Fig. 2) $My_1 : My := \cos a' : 1$, folglich, da man für My die Größe $\frac{My}{\cos a}$ setzen muß:

$$My_1 : \frac{My}{\cos a} = \cos a' : 1 \text{ oder}$$

$$My_1 = My \cdot \frac{\cos a'}{\cos a} = My \cdot m,$$

d. h. der Werth von My_1 ergibt sich dadurch aus dem Werthe von My, daß man diesen mit der Verhältnißzahl $m = \frac{\cos a'}{\cos a}$ multiplizirt.

Die siebente Kolumne enthält die Werthe der Verhältnißzahl $n = \frac{\cos \varphi}{\cos a}$ unter der gleichen Voraussetzung.

Die achte Kolumne enthält die Werthe der Verhältnißzahl von $\frac{1}{m} = \frac{\cos a}{\cos a'}$, welche der Voraussetzung entsprechen, daß für die Projektionen der mit der Axe My parallelen Linien, die wahren Längen dieser Linien beibehalten werden sollen.

Die neunte Kolumne endlich enthält die Werthe der Verhältnißzahl von $\frac{n}{m}$, wodurch die Proportionalwinkel für die mit der Axe Mz parallen Linien konstruirt werden können, unter der Voraussetzung, daß alle mit My parallelen Linien in der mono-isometrischen Projektion ihre ursprünglichen Längen beibehalten. Denn da (Fig. 2)

$Mz_1 : Mz = \cos \varphi : 1$, so ist, auch wenn Mz auf die neue Linieneinheit $\frac{1}{\cos a'}$, bezogen wird:

$$Mz_1 : \frac{Mz}{\cos a'} = \cos \varphi : 1, \text{ also}$$

$$Mz_1 = Mz \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos a'} = Mz \cdot \frac{\frac{\cos \varphi}{\cos a}}{\frac{\cos a'}{\cos a}} \text{ oder}$$

$$Mz_1 = Mz \cdot \frac{n}{m}$$

Der Gebrauch der obigen Tafel wird durch das folgende Beispiel hinreichend erklärt werden.

§. 33.

Aufgabe. Es soll die mono-isometrische Projektion des in Fig. 9 dargestellten Körpers konstruirt werden, wenn die Drehungsaxe A A′ mit der Seite M — 7 einen Winkel von 65° bildet und alle mit M — 7 parallelen Linien in der mono-isometrischen Projektion ihre ursprünglichen Längen beibehalten sollen; ferner soll der Winkel $\varphi = 15^0$ sein.

Auflösung. Da die mit M — 7 parallelen Linien ihre ursprünglichen Längen beibehalten sollen, so muß dem Coordinatensystem eine solche Lage ertheilt werden, daß die Axe M x mit der Dimension M – 7 zusammenfällt oder mit ihr parallel ist; es bildet also diese Coordinatenaxe mit der Drehungsaxe gleichfalls einen Winkel von 65°.

Die vierte Horizontallinie der zweiten Abtheilung unserer Tafel gibt nun für diesen Fall folgende Werthe an:

$$\text{Tang } b = 0{,}121, \quad \frac{1}{m} = 1{,}889$$

$$\text{Tang } b' = 0{,}555;$$

$$m = 0{,}529; \quad \frac{n}{m} = 1{,}999 \text{ oder nahezu } = 2.$$

$$n = 1{,}058;$$

Da der Winkel, welchen die Axe M x mit der Drehungsaxe A A′ bildet, größer als 45° ist, so denke man sich die Namen der Axen vertauscht, d. h. man betrachte M x als M y und umgekehrt und nehme sogleich auch an, daß die mit M y parallelen Linien ihre ursprünglichen Längen beibehalten sollen. Die Verhältnißzahlen m und n sind daher für diesen Fall nicht anwendbar, sondern werden durch die Verhältnißzahlen $\frac{1}{m}$ und $\frac{n}{m}$ ersetzt.

Die Projektion der ursprünglichen Axe M x bildet ferner aus demselben Grunde mit der Projektion der Drehungsaxe A A′ den Winkel b′ und die Projektion der andern Coordinatenaxe M y bildet den Winkel b.

Die Projektionen der drei Coordinatenaxen werden nun auf folgende Weise erhalten:

Man ziehe eine Vertikale Mz_1 (Fig. 17), und errichte auf dieser eine Senkrechte AA'. Die erste dieser Linie bezeichnet die Projektion der Coordinatenaxe $(M, M'z')$ (Fig. 9), und die zweite bezeichnet die Drehungsaxe.

Nun konstruire man aus M mit einer beliebigen als Einheit angenommenen Linie einen Halbkreis, errichte in den Endpunkten A und A' des Durchmessers senkrechte Linien und nehme $Ax_1 = \text{Tang}\, b' = 0{,}555$ und $A'y_1 = \text{Tang}\, b = 0{,}121$. Sodann ziehe man die Linien Mx_1 und My_1.

Alle mit Mx (Fig. 9) parallelen Linien behalten nun (in Figur 17) ihre wahren Längen bei, während alle mit My und $M'z'$ parallelen Linien durch zwei Proportionalwinkel, welche den Verhältnißzahlen $\frac{1}{m} = 1{,}889$ und $\frac{n}{m} = 2$ entsprechen, verändert werden müssen.

Diese Proportionalwinkel ergeben sich dadurch, daß man (Fig. 18) mit einer beliebigen als Einheit angenommenen Linie ein gleichseitiges Dreieck Sss' konstruirt und die Linien 1,89 und 2 auf die Seite ss' von dem Punkte s nach t und u aufträgt. Sodann werden die Linien St und Su gezogen.

Um nun eine beliebige Linie, z. B. $M - 1$ (Fig. 9) in dem Verhältnisse von 1 : 1,89 zu verändern, beschreibe man mit derselben aus S (Fig. 18) einen Kreisbogen $1 - 1'$, ziehe die Sehne $1 - 1'$ und verlängere dieselbe nach $1.''$ Da nun nach Konstruktion $1 - 1' : 1 - 1'' = ss' : st = 1 : 1{,}89$, so muß $1 - 1''$ die Länge der Projektion von $M - 1$ (Fig. 9) bestimmen und folglich nach $M - 1$ (Fig. 17) aufgetragen werden. Ebenso wie der Punkt 1 (Fig. 17) werden auch die Punkte 3 und 4 erhalten. Die Projektionen derjenigen Punkte, welche über der horizontalen Projektionsebene liegen, ergeben sich mit Hülfe des Proportionalwinkels sSu (Figur 18). Bequemer noch als solche Proportionalwinkel, besonders wenn sehr viele Linien zu verändern sind, würde die Anwendung von 1000theiligen Transversalmaßstäben sein, welche im gegebenen Falle mit einer 1,89 und 2mal größern Einheit

konstruirt werden müßten, als derjenige, mit welchem man die Dimensionen des Körpers mißt. Man würde alsdann z. B. mit dem gewöhnlichen Transversalmaßstab die Dimension M — 1 (Fig. 9) messen, und sodann dasselbe Maß an dem 1,89mal größeren Transversalmaßstab abgreifen.

Konstruktion der mono-isometrischen Projektion eines Körpers auf geometrischem Wege.

§. 34.

Dieselbe Aufgabe kann auch ohne Anwendung der obigen Tafel durch eine einfache Konstruktion aufgelöst werden, welche der in §. 23 beschriebenen und durch Fig. 6 erläuterten Methode vollkommen ähnlich ist.

Es seien P und P′ (Fig. 19) die Projektionen des gegebenen Körpers; AA′ die Drehungsaxe, R die horizontale Projektion der darauf senkrecht stehenden Projektionsrichtung und φ der Winkel, den dieselbe mit der horizontalen Projektionsebene bilden soll. Ferner wird verlangt, daß alle mit der Linie Mb des gegebenen Körpers parallelen Linien in der mono-isometrischen Projektion ihre ursprünglichen Längen beibehalten sollen. Man ertheile nun dem Coordinatensystem eine solche Lage, daß die Coordinatenaxe $M_1 y$ mit der Linie Mb parallel ist und nehme eine Hülfsprojektionsebene an, welche auf der Drehungsaxe AA′ senkrecht steht. In dieser konstruire man die Projektionen $M'_1 x'$, $M'_1 y'$ und $M'_1 z'$ der als gleich groß angenommenen Theile $M_1 x$, $M_1 y$ 2c. der drei Coordinatenaxen, die in dem Anfangspunkte M_1 der Coordinaten zusammentreffen; ferner bestimme man die Linie $M'_1 N'_1$, welche mit der horizontalen Projektionsebene den gegebenen Winkel φ bildet, und also mit der Projektionsrichtung parallel ist.

Sofort drehe man das ganze Coordinatensystem, bis die Linie $M'_1 N'_1$ auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht, und bestimme alsdann die horizontalen Projektionen $M_1 x_1$, $M_1 y_1$ und $M_1 z_1$ der drei Coordinatenaxen, welche ihrer neuen, durch die Drehung erhaltenen Lage entsprechen.

Dadurch ergeben sich zuvörderst die drei Winkel, welche die mono-isometrischen Projektionen der drei Coordinatenaxen mit einander bilden, nämlich:

$x_1 M_1 y_1$, $x_1 M_1 z_1$ und $y_1 M_1 z_1$, sowie auch die Winkel $x_1 M_1 A_1$ und $y_1 M_1 B_1$, welche wir bisher mit b und b′ bezeichnet haben.

Es bleibt nun nichts mehr übrig, als die beiden Proportionalwinkel (Figur 19[a]) zu konstruiren. Weil die mit der Axe My parallelen Linien in ihrer wahren Größe erscheinen sollen, so trage man die Linie $M_1 y$ nach $M_1 y_2$, ziehe die Geraden $y_1 x_1$ und $y_1 z_1$ und parallel mit diesen die Linien $y_2 x_2$ und $y_2 z_2$.

Nun beschreibe man mit Mx oder mit $M'_1 z'_1$ einen Kreisbogen (Fig. 19[a]) und trage auf diesen die Linien $M_1 x_2$ und $M_1 z_2$ als Sehne nach $t x_2$ und $t z_2$ auf, wodurch sich die Proportionalwinkel $ts x_2$ und $ts z_2$ ergeben. Alle mit Ma oder mit der Axe $M_1 x$ parallelen Linien werden durch den Proportionalwinkel $ts x_2$ und alle mit der Axe $M'_1 z'$ parallelen Linien mit Hülfe des Proportionalwinkels $ts z_2$ verändert.

Die mono-isometrische Projektion des gegebenen Körpers ist in doppelt so großem Maßstabe in Fig. 20 ausgeführt.

§. 35.

Da man durch die mono-isometrische Projektion eines Körpers, bei jeder beliebigen Sehrichtung, gewisse Dimensionen derselben in ihrer wahren Größe darstellen kann, während bei der dis-isometrischen Projektion nur die mit 2 Coordinatenaxen parallelen Linien in ihrer wahren Größe erscheinen, so scheint die erstere Projektionsart vor der dis-isometrischen Projektion den Vorzug zu verdienen; allein bedenkt man, daß sowohl bei der Konstruktion der mono-isometrischen Projektionen als auch bei der Bestimmung der wahren Größe der Dimensionen, meistens die Anwendung zweier Proportionalwinkel nöthig wird, so mag man in den meisten Fällen gerne auf den oben angeführten Vorzug Verzicht leisten, weil die Konstruktionen für zusammengesetzte Körper viel umständlicher werden und, wie schon öfters erwähnt, hinsichtlich der Form der Projektion durchaus keine Aenderung eintritt und also in dieser Beziehung kein Vortheil erzielt werden kann.

§. 36.

Ueber die Anwendung der dis-isometrischen Projektionsmethode in der Schattenlehre.

Daß mit Hülfe sowohl der isometrischen als auch der dis-isometrischen Projektionsmethode die Eigen- und die Schlagschatten, sowie die Beleuchtungsstärke der verschiedenen Flächen oder der einzelnen Punkte eines gegebenen Körpers bestimmt werden können, habe ich ziemlich ausführlich in den bereits erwähnten früheren Werken gezeigt.

Dritter Theil.

Weißbachs Untersuchungen über die mono-isometrische („anisometrische“) und dis-isometrische („monodimetrische“) Projektionsmethode.

§. 37.

Obgleich die in §. 8 — 13 entwickelten allgemeinen Formeln über die mono-isometrische Projektionsmethode weder in Bezug auf ihre Einfachheit noch auf ihre praktische Anwendbarkeit etwas zu wünschen übrig lassen, so scheint mir dennoch die Mittheilung und die kritische Beleuchtung der in der Einleitung erwähnten Abhandlung des Hrn. Professor Weißbach, des einzigen Schriftstellers, der sich nach dem Erscheinen meiner Werke mit einer tieferen Begründung der isometrischen Projektionsmethode abgegeben hat, hier am rechten Platze zu sein, zumal da mehrere wesentliche Irrthümer dieses tüchtigen Mathematikers von andern Schriftstellern bis jetzt noch nicht aufgefunden worden sind, sondern im Gegentheil, wie z. B. von Hrn. v. Bünau, als erwiesene Wahrheiten betrachtet und als solche anerkannt wurden. Hr. Prof. Weißbach stellt sich in dieser Abhandlung folgende Aufgabe:

§. 38.

„Es sind die Verhältnisse gegeben, in welchen die Projektionen „von gleichen Stücken der drei Coordinatenaxen zu einander stehen; „man soll die Winkel finden, unter welchen diese Projektionen sich „schneiden:

Um diese Aufgabe zu lösen, ertheilt Weißbach dem Coordinatensystem eine beliebige Stellung auf irgend einer Projektionsebene, indem er die Annahme einer stattgefundenen Drehung und daher auch diejenige einer vorhandenen Drehungsaxe umgeht, worin wohl der Grund seines schon in §. 16 erwähnten Irrthums liegen möchte. Wenn nun OA, OB und OC (Fig. 21) gleiche Theile der drei Coordinatenaxen Ox, Oy und Oz sind, so wird eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt in dem Anfangspunkte O des Coordinatensystems liegt und deren Halbmesser gleich OA ist, die drei Ebenen des Coordinatensystems nach den Kreisbögen AB, AC und BC durchschneiden. Denkt man sich ferner in O eine auf der Projektionsebene senkrecht stehende Linie OK gezogen, so werden die drei vertikalen Ebenen AOK, BOK und COK von der Kugelfläche nach den Kreisbögen AK, BK und CK durchschnitten.

Da nun die Winkel AOB, AOC und BOC rechte Winkel sind, so müssen die Bögen AB, AC und BC $= 90^0$ sein.

Es sei nun AOA_1 oder der Winkel, welchen die Coordinatenaxe Ox mit der Projektionsebene bildet, $= \alpha$; ferner sei

Winkel $BOB_1 = \beta$ und
„ $COC_1 = \gamma$, so ist

Bogen $AK = 90^0 - \alpha$
„ $BK = 90^0 - \beta$
„ $CK = 90^0 - \gamma$.

Ferner sei: Winkel AKB oder $A_1OB_1 = \chi$
„ AKC oder $A_1OC_1 = \psi$ und
„ BKC oder $B_1OC_1 = \varphi$,

so ist (Fig. 21 a)

$$\text{Cos } AKB = \frac{\text{Cos } AB - \text{Cos } AK \,.\, \text{Cos } BK}{\text{Sin } AK \,.\, \text{Sin } BK}$$ oder

$$(1) \ldots \operatorname{Cos} \chi = \frac{\operatorname{Cos} 90^0 - \operatorname{Sin} \alpha \cdot \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Cos} \alpha \cdot \operatorname{Cos} \beta} = - \operatorname{Tang} \alpha \operatorname{Tang} \beta$$

Ferner ist (Fig. 21 b)

$$\operatorname{Cos} AKC = \frac{\operatorname{Cos} AC - \operatorname{Cos} AK \cdot \operatorname{Cos} CK}{\operatorname{Sin} AK \cdot \operatorname{Sin} CK} \text{ oder}$$

$$(2) \ldots \operatorname{Cos} \psi = \frac{\operatorname{Cos} 90^0 - \operatorname{Sin} \alpha \cdot \operatorname{Sin} \gamma}{\operatorname{Cos} \alpha \cdot \operatorname{Cos} \gamma} = - \operatorname{Tang} \alpha \operatorname{Tang} \gamma$$

Endlich ist (Fig. 21 c)

$$\operatorname{Cos} BKC = \frac{\operatorname{Cos} BC - \operatorname{Cos} BK \cdot \operatorname{Cos} CK}{\operatorname{Sin} BK \cdot \operatorname{Sin} CK} \text{ oder}$$

$$(3) \ldots \operatorname{Cos} \varphi = \frac{\operatorname{Cos} 90^0 - \operatorname{Sin} \beta \cdot \operatorname{Sin} \gamma}{\operatorname{Cos} \beta \cdot \operatorname{Cos} \gamma} = - \operatorname{Tang} \beta \operatorname{Tang} \gamma$$

Ableitung einer Grundgleichung zwischen den Winkeln α, β und γ.

§. 39.

Da die Winkel χ, ψ und φ zusammengenommen gleich 4 Rechten sind, so muß

$\operatorname{Cos} \varphi = \operatorname{Cos} (360^0 - (\chi + \psi) = \operatorname{Cos} (\chi + \psi$ oder

$\operatorname{Cos} \varphi = \operatorname{Cos} \chi \operatorname{Cos} \psi - \operatorname{Sin} \chi \operatorname{Sin} \psi$ sein.

Hieraus ergibt sich: $\operatorname{Sin} \chi^2 \cdot \operatorname{Sin} \psi^2 = (\operatorname{Cos} \chi \operatorname{Cos} \psi - \operatorname{Cos} \varphi)^2$, oder $\operatorname{Sin} \chi^2 \cdot \operatorname{Sin} \psi^2 = \operatorname{Cos} \chi^2 \operatorname{Cos} \psi^2 - 2 \operatorname{Cos} \chi \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Cos} \varphi^2$

Setzt man nun

$\operatorname{Sin} \chi^2 = 1 - \operatorname{Cos} \chi^2$ und

$\operatorname{Sin} \psi^2 = 1 - \operatorname{Cos} \psi^2$, so ergibt sich

$(1 - \operatorname{Cos} \chi^2) \cdot (1 - \operatorname{Cos} \psi^2) = \operatorname{Cos} \chi^2 \operatorname{Cos} \psi^2 - 2 \operatorname{Cos} \chi \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Cos} \varphi + \operatorname{Cos} \varphi^2$ oder wenn man die Multiplikation ausführt und reducirt:

$1 = \operatorname{Cos} \chi^2 + \operatorname{Cos} \psi^2 + \operatorname{Cos} \varphi^2 - 2 \operatorname{Cos} \chi \operatorname{Cos} \psi \operatorname{Cos} \varphi$

oder wenn man für $\operatorname{Cos} \chi$, $\operatorname{Cos} \psi$ und $\operatorname{Cos} \varphi$ die oben gefundenen Werthe setzt:

$1 = \operatorname{Tang} \alpha^2 \operatorname{Tang} \beta^2 + \operatorname{Tang} \alpha^2 \operatorname{Tang} \gamma^2 + \operatorname{Tang} \beta^2 \operatorname{Tang} \gamma^2 + 2 \operatorname{Tang} \alpha \operatorname{Tang} \beta \cdot \operatorname{Tang} \alpha \operatorname{Tang} \gamma \cdot \operatorname{Tang} \beta \operatorname{Tang} \gamma$

Dividirt man alle Glieder dieser Gleichung mit:

$\operatorname{Tang} \alpha^2 \cdot \operatorname{Tang} \beta^2 \cdot \operatorname{Tang} \gamma^2$, so ergibt sich:

$\text{Cot}\,\alpha^2 \,.\, \text{Cot}\,\beta^2 \,.\, \text{Cot}\,\gamma^2 = \text{Cot}\,\gamma^2 + \text{Cot}\,\beta^2 + \text{Cot}\,\alpha^2 + 2$ oder da:

$\text{Cot}\,\alpha^2 = \text{Cosec}\,\alpha^2 - 1 = \frac{1}{\text{Sin}\,\alpha^2} - 1$, ferner

$\text{Cot}\,\beta^2 = \text{Cosec}\,\beta^2 - 1 = \frac{1}{\text{Sin}\,\beta} - 1$ und

$\text{Cot}\,\gamma^2 = \text{Cosec}\,\gamma^2 - 1 = \frac{1}{\text{Sin}\,\gamma^2} - 1$ ist, so folgt:

$$\left(\frac{1}{\text{Sin}\,a^2} - 1\right)\left(\frac{1}{\text{Sin}\,\beta^2} - 1\right)\left(\frac{1}{\text{Sin}\,\gamma^2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{\text{Sin}\,\alpha^2} - 1 + \frac{1}{\text{Sin}\,\beta^2} - 1 + \frac{1}{\text{Sin}\,\gamma^2} - 1 + 2 =$$

$$= \frac{1}{\text{Sin}\,\alpha^2} + \frac{1}{\text{Sin}\,\beta^2} + \frac{1}{\text{Sin}\,\gamma^2} - 1$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich durch weitere Behandlung die folgende:

$$\left(\frac{1 - \text{Sin}\,\alpha^2}{\text{Sin}\,\alpha^2}\right)\left(\frac{1 - \text{Sin}\,\beta^2}{\text{Sin}\,\beta^2}\right)\left(\frac{1 - \text{Sin}\,\gamma^2}{\text{Sin}\,\gamma^2}\right) =$$

$$\frac{\text{Sin}\,\beta^2\,\text{Sin}\,\gamma^2 + \text{Sin}\,\alpha^2\,\text{Sin}\,\gamma^2 + \text{Sin}\,\alpha^2\,\text{Sin}\,\beta^2 - \text{Sin}\,\alpha^2\,\text{Sin}\,\beta^2\,\text{Sin}\,\gamma^2}{\text{Sin}\,\alpha^2\,\text{Sin}\,\beta^2\,\text{Sin}\,\gamma^2}$$

Wenn man endlich die angezeigten Multiplikationen ausführt und sodann reducirt, so ergibt sich:

$1 - \text{Sin}\,\alpha^2 - \text{Sin}\,\beta^2 - \text{Sin}\,\gamma^2 = 0$; folglich ist

(4) . . $\text{Sin}\,\alpha^2 + \text{Sin}\,\beta + \text{Sin}\,\gamma^2 = 1.$

Warum Prof. Weißbach diesen langen und mühsamen Weg eingeschlagen hat, um eine Formel abzuleiten, welche sich aus einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung ergibt, vermag ich nicht zu fassen, und es drängt sich mir bei'm Anblicke dieser mathematischen Spielerei die Vermuthung auf, daß Professor Weißbach auf diesem Wege wahrscheinlich etwas Anderes zu finden hoffte, als das wirklich Gefundene. Aber warum hat der sonst so tüchtige Mathematiker nicht diesen ganzen mathematischen Wust bei Seite gethan? Die einfachere geometrische Betrachtung, welche zu demselben Ziele mit Bewußtsein führt und der analytischen Künsteleien nicht bedarf, ist folgende: Man fälle aus K (Fig. 21)

auf die Coordinatenaxen OA, OB und OC senkrechte Linien Kk, Kk' und Kk'', so ist

$$\text{Cos KOA} = \frac{kO}{KO};\ \text{Cos KOB} = \frac{k'O}{KO};\ \text{Cos KOC} = \frac{k''O}{KO}$$

Nun sind kO, k'O und k''O die Ordinaten des auf die Coordinatenaxen OA, OB und OC bezogenen Punktes K; bezeichnet man daher diese mit x', y' und z', so ist nach einem bekannten Lehrsatze

$$KO = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$ und man hat nun

$(\text{Cos KOA})^2$ oder

$$\text{Sin}\,\alpha^2 = \frac{x'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$(\text{Cos KOB})^2$ oder

$$\text{Sin}\,\beta^2 = \frac{y'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$(\text{Cos KOC})^2$ oder

$$\text{Sin}\,\gamma^2 = \frac{z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$ folglich

$$\text{Sin}\,\alpha^2 + \text{Sin}\,\beta^2 + \text{Sin}\,\gamma^2$$

$$= \frac{x'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \frac{y'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \frac{z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$= \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = 1$$

§. 40.

Bei dieser Gelegenheit fühle ich mich zu der Bemerkung veranlaßt, daß die mathematischen Schriftsteller ihre schon an und für sich schwierigen Untersuchungen den Lesern nicht durch unnützen gelehrten Kram noch mehr erschweren sollten. Woher kömmt es doch, daß man alle andere wissenschaftliche Werke lesend studieren und in sich aufnehmen kann, während man beim Studium mathematischer Schriften stets Feder oder Bleistift zur Hand haben muß, wenn man sich von der Richtigkeit ihrer Deduktionen überzeugen will? Ist denn Papier und Druckerschwärze so theuer, daß es sich lohnt, die Ausführung der vorkommenden Operationen und Reduktionen zu übergehen und nur die erhaltenen Resultate

anzuführen? Könnten andere Schriftsteller nicht mit gleichem Rechte alle Zwischenschlüsse überspringen und uns bloß die Resultate ihres Nachdenkens mittheilen? Besonders deutsche Mathematiker sind diesem tadelnswerthen Fehler im hohen Grade unterworfen und scheinen es fast für eine Hauptaufgabe zu halten: so zu schreiben, daß sie von ihren Lesern möglichst schwer verstanden werden; denn sie erscheinen uns ja (so mögen sie vielleicht glauben) in demselben Maße als größere Denker, je schwieriger das Studium ihrer Werke ist. Die tüchtigsten Mathematiker Frankreichs liefern den Beweis, daß man klar schreiben kann, ohne darüber den Ruhm der Gelehrsamkeit einzubüßen.

§. 41.

Herleitung der Gleichungen für die Winkel α, β, γ, χ und φ, ausgedrückt durch die Verhältnisse der Projektionen gleicher Theile der Coordinatenaxen.

Bezeichnet man sofort OA_1 (Fig. 21) mit x_1, OB_1 mit y_1 und OC_1 mit z_1 und setzt man $OA = OB = OC = 1$, so ist, weil $OA_1 = OA \,.\, \text{Cos}\,\alpha$; $OB_1 = OB \,.\, \text{Cos}\,\beta$; $OC_1 = OC \,.\, \text{Cos}\,\gamma$ ist,

$x_1 = \text{Cos}\,\alpha$; $y_1 = \text{Cos}\,\beta$; $z_1 = \text{Cos}\,\gamma$.

Nimmt man nun ferner an, es verhalte sich:

$x_1 : y_1 = 1 : m$ und

$x_1 : z_1 = 1 : n$, so ist

$y_1 = m x_1$ und $z_1 = n x_1$ oder

$y_1 = m \,.\, \text{Cos}\,\alpha$ und $z_1 = n \,.\, \text{Cos}\,\alpha$, folglich auch:

$\text{Cos}\,\beta = m \,.\, \text{Cos}\,\alpha$ und $\text{Cos}\,\gamma = n \,.\, \text{Cos}\,\alpha$.

Werden nun diese Werthe in die Gleichung (4) des §. 39 substituirt, so ergibt sich:

$(1 - \text{Cos}\,\alpha^2) + (1 - m^2\,\text{Cos}\,\alpha^2) + (1 - n^2\,\text{Cos}\,\alpha^2) = 1$ oder

$\text{Cos}\,\alpha^2\,(-1 - m^2 - n^2) = 1 - 3$, folglich ist:

$$\text{Cos}\,\alpha^2 = \frac{2}{1 + m^2 + n^2} \;\ldots\; \text{(I)}$$ (Vergleiche Formel II §. 12).

Hieraus ergibt sich:

$$\text{Sin}\,\alpha^2 = 1 - \text{Cos}\,\alpha^2 = \frac{m^2 + n^2 - 1}{1 + m^2 + n^2} \text{ und}$$

$$\text{Tang}\,\alpha^2 = \frac{\text{Sin}\,\alpha^2}{\text{Cos}\,\alpha^2} = \frac{m^2 + n^2 - 1}{1 + m^2 + n^2} : \frac{2}{1 + m^2 + n^2} \text{ oder}$$

$$\text{Tang}\,\alpha^2 = \frac{m^2 + n^2 - 1}{2}$$ Ferner ergibt sich:

$$\text{II} \,.\,.\, \begin{cases} \text{Cos}\,\beta^2 = m^2\,\text{Cos}\,\alpha^2 = \dfrac{2\,m^2}{1 + m^2 + n^2} \\ \text{Sin}\,\beta^2 = 1 - \dfrac{2\,m^2}{1 + m^2 + n^2} = \dfrac{1 + n^2 - m^2}{1 + m^2 + n^2} \\ \text{Tang}\,\beta^2 = \dfrac{1 + n^2 - m^2}{2\,m^2} \end{cases}$$

(Vergleiche Formel III §. 12).

$$\text{III} \,.\,.\, \begin{cases} \text{Cos}\,\gamma^2 = n^2 \,.\, \text{Cos}\,\alpha^2 = \dfrac{2\,n^2}{1 + m^2 + n^2} \\ \text{Sin}\,\gamma^2 = 1 - \text{Cos}\,\gamma^2 = \dfrac{1 + m^2 - n^2}{1 + m^2 + n^2} \\ \text{Tang}\,\gamma^2 = \dfrac{1 + m^2 - n^2}{2\,n^2} \end{cases}$$

(Vergleiche Formel I §. 12).

Da nun nach Gleichung (I), (II) und (III)

$\text{Cos}\,\chi = -\,\text{Tang}\,\alpha\;\text{Tang}\,\beta$

$\text{Cos}\,\psi = -\,\text{Tang}\,\alpha\;\text{Tang}\,\gamma$

$\text{Cos}\,\varphi = -\,\text{Tang}\,\beta \,.\, \text{Tang}\,\gamma$ ist, so ergeben sich hieraus durch Substitution des Werthes von $\text{Tang}\,\alpha$, $\text{Tang}\,\beta$ und $\text{Tang}\,\gamma$ folgende Gleichungen:

$$\text{IV} \,.\,.\, \text{Cos}\,\chi = -\,\frac{\sqrt{(m^2 + n^2 - 1)(1 + n^2 - m^2)}}{2\,m}$$

$$\text{V} \,.\,.\, \text{Cos}\,\psi = -\,\frac{\sqrt{(m^2 + n^2 - 1)(1 + m^2 - n^2)}}{2\,n}$$

$$\text{VI} \,.\,.\, \text{Cos}\,\varphi = -\,\frac{\sqrt{(1 + n^2 - m^2)(1 + m^2 - n^2)}}{2\,m\,n}$$

§. 42.
Umwandlung der allgemeinen Formeln für die isometrische Projektionsmethode.

Bei den isometrischen Projektionen wird $m = n = 1$.

Hiedurch verwandeln sich die allgemeinen Formeln in folgende:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin}\,\alpha^2\\ \text{Sin}\,\beta^2\\ \text{Sin}\,\gamma^2\end{array}\right\} = \tfrac{1}{3}\qquad \left.\begin{array}{l}\text{Cos}\,\alpha^2\\ \text{Cos}\,\beta^2\\ \text{Cos}\,\gamma^2\end{array}\right\} = \tfrac{2}{3}\qquad \left.\begin{array}{l}\text{Tang}\,\alpha^2\\ \text{Tang}\,\beta^2\\ \text{Tang}\,\gamma^2\end{array}\right\} = \tfrac{1}{2}$$

Hieraus ergibt sich $\alpha = \beta = \gamma = 35^0\,15'\,52''$.

Die Größen x_1, y_1 und z_1 werden gleich $\text{Cos}\,\alpha = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}8165$ und die Gleichungen für $\text{Cos}\,\chi$, $\text{Cos}\,\psi$ und $\text{Cos}\,\varphi$ gehen in folgende über:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}\,\chi\\ \text{Cos}\,\psi\\ \text{Cos}\,\varphi\end{array}\right\} = -\tfrac{1}{2},\ \text{also}\ \chi = \psi = \varphi = 120^0.$$

Aus diesen Werthen ergibt sich: 1) daß eine jede Coordinatenaxe mit der Projektionsebene einen Winkel von $35^0\,16'$ (nahezu) einschließt; 2) daß die Projektionen dieser Axen Winkel von 120^0 und 60^0 einschließen; 3) daß sich die Coordinaten zu ihren Projektionen $= 0{,}8165 : 1 = 8165 : 10000$ oder annähernd $= 8 : 10$ verhalten.

§. 43.
Umwandlung der allgemeinen Formeln für die disisometrische („monodimetrische") Projektionsmethode.

Bei den monodimetrischen Projektionen muß $x_1 = y_1$ oder weil $y_1 = m\,x_1$ gesetzt wurde, $m = 1$ sein.

Hieraus ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}\,\alpha^2\\ \text{Cos}\,\beta^2\end{array}\right\} = \frac{2}{n^2 + 2};\quad \left.\begin{array}{l}\text{Sin}\,\alpha^2\\ \text{Sin}\,\beta^2\end{array}\right\} = \frac{n^2}{n^2 + 2};\quad \left.\begin{array}{l}\text{Tang}\,\alpha^2\\ \text{Tang}\,\beta^2\end{array}\right\} = \frac{n^2}{2}$$

$$\text{Cos}\,\gamma^2 = \frac{2\,n^2}{n^2 + 2};\quad \text{Sin}\,\gamma^2 = \frac{2 - n^2}{2 + n^2};\quad \text{Tang}\,\gamma^2 = \frac{2 - n^2}{2\,n^2}.$$

$$\text{Cos}\,\chi = -\frac{n^2}{2};$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}\,\varphi\\ \text{Cos}\,\psi\end{array}\right\} = -\frac{\sqrt{2 - n^2}}{2}$$

§. 44.

Bemerkungen zu Prof. Weißbachs Ansicht über die zweckmäßigsten Werthe von n.

Zum Projiciren von Krystallgestalten hält Prof. Weißbach die Annahme von $n = \frac{1}{3}$ und $n = \frac{1}{4}$ für diejenige, welche die zweckmäßigsten Projektionen geben. Ich habe mich schon früher (S. 26) über die Unrichtigkeit dieser Ansicht ausgesprochen und gezeigt, daß die hieraus hervorgehenden Projektionen häßlich zusammengedrückt erscheinen müssen, und den isometrischen Projektionen, welche an diesem einzigen Fehler leiden, noch um Vieles nachstehen. Da Prof. Weißbach selbst die Werthe von χ berechnet hat, welche den obigen Werthen von n entsprechen, indem er angibt, daß, wenn

$n = \frac{1}{3}$ gesetzt wird, $\chi = 93^0 11'$ und

für $n = \frac{1}{4}$ der Winkel $\chi = 91^0 47'$ sei, so können wir uns auch diesen Irrthum nur aus der völligen Vernachläßigung jeder geometrischen Betrachtung erklären; denn eine einzige Konstruktion würde den tüchtigen Verfasser dieser Abhandlung sogleich aufgeklärt haben.

§. 45.

Ueber die Grenzen, zwischen welchen die Werthe der Verhältnißzahlen m und n liegen.

Daß für die dis-isometrischen Projektionen die Verhältnißzahl $n > o$ und kleiner als $\sqrt{2}$ angenommen werden müsse, wurde bereits in §. 12 hinreichend klar auseinandergesetzt. Prof. Weißbach bestimmt auch die Grenzen der Verhältnißzahl m für die mono-isometrischen (anisometrischen) Projektionen.

Diese ergeben sich aus den Gleichungen für $\cos \alpha$, $\cos \beta$ und $\cos \gamma$. Es muß nämlich:

1) $\cos \alpha$ oder $\sqrt{\frac{2}{1 + m^2 + n^2}} < 1$ also

$2 < 1 + m^2 + n^2$ oder $m^2 + n^2 > 1$ sein;

2) muß $\cos \beta$ oder $\sqrt{\frac{2\, m^2}{1 + m^2 + n^2}} < 1$ oder

$2\, m^2 < 1 + m^2 + n^2$, folglich auch $n^2 + 1 > m^2$ sein;

3) muß $\cos\gamma$ oder $\sqrt{\frac{1 + m^2 + n^2}{2\,n^2}} < 1$ oder

$2\,n^2 < 1 + m^2 + n^2$ oder $m^2 + 1 > n^2$ sein.

Wird nun $m^2 > n^2$ angenommen, so muß also

1) $m^2 > 1 - n^2$

2) $m^2 < 1 + n^2$ und

3) $m^2 > n^2 - 1$ sein, welche letztere Bedingung sich von selbst versteht, so daß also nur noch die beiden ersten übrig bleiben. Man hat also m stets innerhalb der Grenzen $1 - n^2$ und $1 + n^2$ zu wählen, für n selbst aber können beliebige Werthe gesetzt werden.

Was die Wahl der Werthe von m und n betrifft, so habe ich zu bemerken, daß es schwer sein möchte, sich von vornherein bei gegebenen oder beliebig gewählten Werthen dieser beiden Größen eine nur ungefähr richtige Anschauung der daraus hervorgehenden isometrischen Projektion des Körpers zu bilden, während aus den Werthen der Winkel, die ich in §. 7 ꝛc. mit h, h′ und φ bezeichnet habe, schon von vornherein auf eine gute oder schlechte Wirkung des Bildes geschlossen werden kann. Darum gebe ich den in §. 8. bis §. 14 entwickelten Formeln den entschiedenen Vorzug vor den Weißbach'schen, zumal da sie sich auch durch ihre große Einfachheit sehr empfehlen.

§. 46.

Hiemit glaube ich meinen kritischen Auszug aus Prof. Weißbachs Abhandlung beschließen zu müssen; denn was er sonst noch bemerkt, ist weder neu noch wesentlich und findet sich in dem Vorhergehenden ausführlicher und gründlicher behandelt. Nur das Eine will ich noch berühren, daß Prof. Weißbach den Hauptgrundsatz der isometrischen Projektionslehre, wodurch dieselbe für die Praxis und für das technische Zeichnen so nützlich wird, ganz aus dem Auge verloren hat. Dieser Grundsatz, nämlich: Einführung einer neuen Linieneinheit, damit die Projektionen der Coordinaten, diesen Coordinaten selbst gleich werden, ist es vorzüglich, welche die isometrische Projektionsmethode vor allen übrigen empfiehlt. Denn sie gib

das gewünschte Bild eines Körpers auf dem einfachsten Wege und mit den brauchbarsten Dimensionen. Ferner ist eine jede isometrische Projektion zugleich die beste Hülfskonstruktion zur Bestimmung der Schatten- und Beleuchtungsstärke eines gegebenen Körpers für eine bestimmte Richtung der Lichtstrahlen.

Vierter Theil.

Entwicklung der isometrischen Projektionsmethoden durch die Elemente der darstellenden Geometrie.*)

§. 47.

Zweck und Eintheilung der isometrischen Projektionsmethoden.

Die Lehre von den isometrischen Projektionsmethoden ist ein neuer Zweig der darstellenden Geometrie. Sie beschäftigt sich mit der Konstruktion senkrechter Parallelprojektionen**), worin die ursprünglichen Maße der mit den drei Hauptrichtungen der Körper parallelen Linien, je nach der angenommenen Sehrichtung, entweder ganz oder theilweise isometrisch, d. h. gleich groß, wie am Körper selbst, erscheinen.

Wenn in einem solchen Bilde alle Längen, Breiten und Höhen so groß wie die entsprechenden Linien des Körpers selbst sind, so nennt man dasselbe ein dreiarig-isometrisches, oder einfach ein isometrisches Bild. Farish's Verdienst beschränkt sich rein auf die Darstellung solcher Bilder. Wenn jedoch

*) Man vergleiche die Vorrede.

**) Man versteht unter senkrechten Parallelprojektionen solche, welche parallelen Sehstrahlen entsprechen, auf denen die Bildebene senkrecht steht. Parallelprojektionen werden auch orthographisch und senkrechte Projektionen orthogonal, also senkrechte Parallelprojektionen orthographische und orthogonale Projektionen genannt.

nur die mit zwei Hauptrichtungen (nämlich mit den Richtungen der Länge und Breite, oder der Länge und Höhe, oder der Breite und Höhe) parallelen Linien im perspektivischen Bilde des Körpers isometrisch sind, so wird es ein zweiarig-isometrisches, oder auch ein dis-isometrisches, von Prof. Weißbach ein mono-dimetrisches Bild genannt.

Erscheinen endlich nur die mit einer Hauptrichtung parallelen Linien in ihrer wahren Größe, so nennt man die Projektion einarig-isometrisch oder mono-isometrisch (Weißbach nennt sie anisometrisch).

Die Vorzüge isometrischer, parallel-perspektivischer Bilder vor den polar-perspektivischen werden von dem Leser, welcher mit beiden Projektionsmethoden bekannt ist, leicht erkannt werden, und es wäre überflüssig, hier näher darauf einzugehen. Für technische Zwecke können die polar-perspektivischen Bilder stets durch isometrische ersetzt werden. Ja selbst in Bezug auf Schönheit stehen die letztern den polar-perspektivischen Bildern nur selten nach, und sie machen sogar eine bessere Wirkung, wenn man bei letztern den Augenpunkt nicht sorgfältig gewählt hat.

§. 48.

Betrachtung des Würfels, als Grundlage der isometrischen Projektionsmethoden.

Die Konstruktion isometrischer Bilder, sowie die ganze Theorie der isometrischen Projektionsmethode gründet sich wesentlich auf die Betrachtung des Würfels. Wir werden sehen, daß man aus dem Bilde eines Würfels, welches einer angenommenen Sehrichtung entspricht, auch das Bild eines jeden Körpers, dessen drei Hauptrichtungen mit den in einem Eckpunkte zusammentreffenden Würfelkanten parallel sind, auf sehr einfache Weise ableiten kann. Wenn auch, strenge genommen, nicht sowohl das Bild des ganzen Würfels, sondern wesentlich nur die Lage der in einem Endpunkte zusammentreffenden Kanten zu bestimmen ist, so gewährt doch die Betrachtung des ganzen Würfels den Vortheil, daß hiedurch dem Anfänger das Verständniß der Konstruktionen erleichtert wird.

Wir werden uns daher jeden Körper, dessen Bild wir für eine angenommene Sehrichtung konstruiren wollen, von einem Würfel eingeschlossen oder auch mit einem Würfel verbunden denken, und zwar stets so, daß die Längen-, Breiten- und Höhenrichtung des Körpers mit den Würfelkanten parallel sind.

Zur Erleichterung der Betrachtungen und Konstruktionen werden wir endlich dem Würfel eine solche Stellung zwischen einer horizontalen und vertikalen Projektionsebene geben, daß eine als Grundfläche betrachtete Fläche des Würfels (siehe Fig. 6 Tafel 5) mit der horizontalen und eine beliebige Seitenfläche mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist. Bei dieser Stellung erscheint, wie Figur 6 Tafel 5 zeigt, sowohl die horizontale als die vertikale Projektion des Würfels als ein Quadrat.

Von einigen Hauptrichtungen der Sehstrahlen.

§. 49.

Unter den unendlich vielen Richtungen, in welchen man einen Würfel und irgend einen von ihm eingeschlossenen Körper betrachten kann, sind vor allen einige Hauptrichtungen in's Auge zu fassen. Es sind diejenigen, welche mit einer der sechs Diagonalebenen des Würfels parallel sind. Wir nennen dieselben **Hauptrichtungen**, weil eine mit einer Ebene parallele Linie immer noch unendlich viele verschiedene spezielle Richtungen besitzen kann. Gibt man dem Würfel die oben erwähnte Stellung, so werden zwei Diagonalebenen desselben durch je zwei gegenüberliegende vertikale Würfelkanten, die vier andern Diagonalebenen aber durch je zwei und zwei gegenüberliegende horizontale Kanten gehen.

Die relativen Lagen dieser Ebene sind in den Figuren 1 bis 5 Tafel 5 dargestellt, worin SR stets die Sehrichtung und rs ihre Projektion in der Grundfläche des Würfels anzeigt. Obgleich nun ebenso viele Hauptrichtungen der Sehstrahlen möglich sind, als die Zahl der Diagonalebenen beträgt, nämlich sechs, so ist doch leicht einzusehen, daß, wenn man den Würfel Fig. 1 um 90° dreht, die Diagonalebene bfdh in die Lage der Diagonalebene aecg kömmt, und daß somit ein für die erste dieser Hauptrichtungen

konstruirtes Bild die gleichen Grundeigenschaften besitzen muß, wie ein Bild, welches der zweiten Hauptrichtung entspricht. Ebenso bieten die dritte, vierte, fünfte und sechste Hauptrichtung der Sehstrahlen nur einer einzigen Untersuchung Stoff, oder sie bilden nur einen gemeinschaftlichen Hauptfall. Denn dreht man den Würfel Fig. 2 um 180°, so wird die Diagonalebene ebch (Fig. 2) in die Lage der Ebene fgad (Fig. 3) kommen; ebenso wird die Ebene dcef in Fig. 5 durch eine Drehung des Würfels um 180° die Stellung der Ebene abgh (Fig. 4) einnehmen. Durch diese Drehungen sind also 4 Hauptrichtungen auf 2 zurückgeführt (Fig. 3 und 4). Dreht man endlich den Würfel (Fig. 4) um 90°, so daß die Kante ab die Stelle von ad (Fig. 3) einnimmt, so wird die Ebene abgh (Fig. 4) in die Lage der Ebene adfg (Fig. 3) kommen. Wir werden daher unsere Untersuchungen nur auf folgende drei Hauptlagen der Sehstrahlen auszudehnen haben: **Erste Hauptlage**: Die Sehstrahlen sind mit einer Diagonalebene des Würfels parallel, welche durch zwei vertikale Kanten geht (Fig. 1). **Zweite Hauptlage**: Die Sehstrahlen sind mit einer Diagonalebene des Würfels parallel, welche durch zwei horizontale Kanten geht (Fig. 2—5). **Dritte Hauptlage**: Die Sehstrahlen sind mit keiner Diagonalebene des Würfels parallel und besitzen eine ganz willkührliche Richtung (Fig. 32. Taf. 6).

Von der Konstruktion und den Eigenschaften des Würfelbildes, welches der ersten Hauptlage der Sehstrahlen entspricht.

§. 50.

Aufgabe. Man soll das Bild eines Würfels konstruiren, wenn die Sehstrahlen mit einer durch zwei vertikale Kanten gelegten Diagonalebene parallel sind, und mit der horizontalen Projektionsebene einen gegebenen Winkel v einschließen (Fig. 6, 7, 8. Taf. 5).

Auflösung. Es sei in Fig. 6 a b c d die horizontale und a′ b′ e′ f′ die vertikale Projektion des Würfels; ferner sei a c die horizontale Projektion der Diagonalebene, mit welcher die Sehstrahlen parallel sein sollen.

Unter dieser Voraussetzung muß die horizontale Projektion S der Sehrichtung mit a c parallel sein; ihre vertikale Projektion lassen wir einstweilen unbestimmt, weil sie jetzt noch nicht nöthig ist.

Um nun das verlangte Bild des Würfels zu konstruiren, drehe man denselben so, daß während der Drehung seine Grundfläche a b c d die horizontale Projektionsebene nicht verläßt, und die Diagonalebene a c, nach der Drehung, parallel mit der vertikalen Projektionsebene ist. Die horizontale Projektion des Würfels in seiner neuen Stellung ist das Quadrat a b c d Fig. 7, das, wie leicht einzusehen, bis auf die Lage zur Projektionsaxe unverändert geblieben ist; die vertikale Projektion aber hat sich verändert und stellt sich nun als ein Rechteck a′ c′ g′ e′ dar. Ferner muß nach dieser Drehung, die mit dem Würfel unveränderlich verbunden gedachte Sehrichtung, weil sie mit der Diagonalebene a c parallel ist, auch mit der vertikalen Projektionsebene parallel sein; ihre durch den Eckpunkt c′ des Würfels gezogene vertikale Projektion S′ c′ bildet daher mit der Projektionsaxe AB einen Winkel S′ c′ a′, welcher dem gegebenen Winkel V gleich ist, den die Sehrichtung mit der horizontalen Projektionsebene einschließen soll.

Nimmt man jetzt eine zweite Drehung vor, so daß die Sehrichtung in eine auf der horizontalen Projektionsebene senkrechte Lage S′ c′ (Fig. 8) kömmt, ohne daß die Diagonalebene ihre parallele Lage zur vertikalen Projektionsebene verändert, so ist klar, daß die horizontale Projektion a b f g h d a des Würfels, welche der Stellung desselben nach der zweiten Drehung entspricht, zugleich das gewünschte Bild sein muß. Allerdings besitzen in dieser Projektion die Höhenkanten des Würfels nicht ihre natürliche Lage; eine Drehung der horizontalen Projektionsebene um 90° würde jedoch dieselbe herstellen, wofern wir das Bild des Würfels als den eigentlichen Zweck unserer Aufgabe betrachteten.

Aus dem Detail der bei diesen Drehungen auszuführenden Konstruktionen heben wir namentlich hervor, daß die vertikale

Projektion (Fig. 8) des Würfels in seiner dritten Stellung gleich derjenigen in seiner zweiten Stellung sein muß. Man ziehe daher zuerst S′c′ senkrecht auf AB und konstruire auf S′c′ das Dreieck S′a′c′, welches mit dem Dreieck S′a′c′ (Fig. 7) kongruent ist. Nun kann das Rechteck c′a′e′g′ (Fig. 8) leicht nach dem Rechtecke c′a′e′g′ (Fig. 7) kopirt werden.

Unterwirft man das gefundene Bild abfg (Fig. 6) einer aufmerksamen Betrachtung, so lassen sich sehr leicht folgende Eigenschaften desselben nachweisen:

I. Alle horizontalen Würfelkanten erscheinen gleich groß und daher in demselben Verhältnisse verkürzt; denn da in Fig. 8 ab = ad = bc ꝛc. und anderseits in Fig. 6 ab = ad = bc ꝛc. ist, so muß auch

ab (Fig. 8) : ab (Fig. 6) = ad (Fig. 8) : ad (Fig. 6) = bc (Fig. 8) : be (Fig. 6) ꝛc.

sein. Die vertikalen Würfelkanten sind zwar unter sich gleich, aber in der Regel größer oder kleiner als die horizontalen Kanten; daher ist in der Regel $\frac{cb}{cg}$ nicht = 1, sondern entweder kleiner oder größer als 1. Derjenige Fall, wo die Projektionen der vertikalen und der horizontalen Kanten gleich groß erscheinen, wird weiter unten besonders behandelt werden.

Da die Größen und die Richtungen der in einem beliebigen Eckpunkte c (Fig. 8) zusammentreffenden Würfelkanten maßgebend für alle andern sind, gemäß des Lehrsatzes: „Die in derselben Projektionsebene liegenden Projektionen gleicher und paralleler Linien sind ebenfalls gleich und parallel,“ so hat man dieselben die **Bildaxen** genannt. Die gleich groß erscheinenden Kanten cb und cd werden die **isometrischen Axen**, die Kante cg die **anisometrische** Axe und das ganze Bild des Würfels sowie eines jeden Körpers, dessen Längen-, Breiten- und Höhenrichtung mit den Würfelkanten parallel sind, wird das **zweiaxig-isometrische** Bild des Würfels oder des Körpers genannt.

II. Der Winkel bcd, welchen die zwei isometrische Axen cb und cd (Fig. 8) einschließen, wird von der dritten anisometrischen

Bildare cg in zwei gleiche Theile getheilt; sowie auch die von den isometrischen Axen mit der dritten Bildare eingeschlossenen Winkel bcg und dcg einander gleich sind. Da die Beweise dieser beiden Sätze ganz elementar sind und unmittelbar aus den Elementen der Projektionslehre hervorgehen, so überlassen wir ihre Ausführung dem Leser, und bemerken nur, daß 1) zu zeigen ist, warum die Vierecke abcd und efgh Rhomben sein müssen; 2) daß die Projektion cg mit den Diagonalen ac und eg dieser Rhomben in derselben geraden Linie liegen; endlich 3) daß die Kante cg nur für eine einzige Lage des Sehstrahles, gleich den Kanten cb und cd werden könne.

§. 51.

Von dem Princip, welches der Konstruktion isometrischer Bilder zu Grunde gelegt wird.

Obgleich in dem erhaltenen Bilde des Würfels alle horizontalen Kanten gleich groß erscheinen, so sind sie doch nur relativ und nicht absolut isometrisch, weil sie die ursprünglichen Längen verkürzt darstellen. Allerdings werden sich ziemlich einfache Mittel finden lassen, um von den Bildmaßen auf die Körpermaße zurückzuschließen, aber es bietet sich folgendes Verfahren als das einfachste dar: Man kann sich nämlich die Dimensionen des gegebenen Würfels in einem solchen Verhältnisse vergrößert denken, daß bei gleicher Sehrichtung die Projektionen der horizontalen Kanten dieses fingirten Würfels gerade so groß werden, als die horizontalen Kanten des gegebenen Würfels sind. Dadurch erhält man ein, dem ersten Bilde ähnliches, zweiarig-isometrisches Bild $a_1\, b_1\, c\, f_1\, g_1\, h_1\, d_1$ (Fig. 8) im vollen Sinne des Wortes. Daß die vertikalen Kanten des zweiten Würfelbildes nicht den Würfelkanten selbst gleich werden können, folgt daraus, daß das Verhältniß zwischen den Projektionen cb und cg der horizontalen und vertikalen Kanten durch unsere Voraussetzung nicht geändert wird. Waren also die vertikalen Kanten im ersten Bilde größer als die horizontalen, so müssen sie auch im zweiten Bilde größer sein als diese.

Die Längen der vertikalen Kanten cg_1 etc. werden dadurch bestimmt, daß man b mit g verbindet, cb_1 gleich cb (Fig. 6) macht und $b_1 g_1$ parallel mit bg zieht. Denn nun ist $cg : cg_1 = cb : cb_1$.

§. 52.

Von der Konstruktion zweiarig-isometrischer Bilder, welche der ersten Hauptlage der Sehstrahlen entsprechen.

Aufgabe.

Man soll das zweiarig-isometrische Bild eines beliebigen Körpers konstruiren, wenn die Sehrichtung parallel mit einer durch zwei vertikale Kanten gelegten Diagonalebene eines horizontal aufgestellten Würfels ist, dessen Kanten mit der Längen-, Breiten- und Höhenrichtung des Körpers parallel sind. (Fig. 16, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14 und 15.)

Auflösung.

Wir setzen sowohl bei dieser als bei allen folgenden Aufgaben voraus, daß die Körper durch ihre Grundrisse, Aufrisse und Seitenansichten gegeben seien. Denn obgleich jedes zweiarig-isometrische Bild nach dem vorliegenden Körper unmittelbar konstruirt werden kann, so wird dennoch eine unmittelbare Konstruktion des Bildes um so schwieriger und zeitraubender, je zusammengesetzter die bezügliche Körperverbindung ist, und man gelangt dann schneller zum Ziele, wenn man zuerst den Grund- und Aufriß konstruirt und sodann diese zur Herleitung des zweiarig-isometrischen Bildes benützt.*) (Ueber die Aufnahme von Ma-

*) In der „Axonometrie“ der Herren Meyer wird zwar die gegentheilige Ansicht aufgestellt; auch wurden daselbst die isometrischen Projektionsbeispiele, ohne Anwendung der Auf- und Grundrisse, ausgeführt. Die Möglichkeit eines solchen Verfahrens läugnen wir nun zwar nicht, wohl aber ihre Zweckmäßigkeit. Denn wir finden hierin nichts Positives, sondern bemerken nur den gänzlichen Mangel einer jeden Methode. Der Geübte weiß sich allerdings auch in verwickelten Fällen zu helfen; nicht aber ein Anfänger. Wir haben daher weiter unten ein Verfahren mitgetheilt, das in den verwickeltsten Fällen ebenso leicht und sicher zum Ziele führt, wie in den hier gewählten einfachen Beispielen.

schinen siehe weiter unten.) Es sei nun in Fig. 16 der Grundriß und der Aufriß eines Gartenhauses mit quadratförmiger Grundfläche gegeben. Da der Grundriß dieses Körpers ein Quadrat a b c d ist, so kann dasselbe zugleich als die horizontale Projektion des Würfels betrachtet werden, dessen Kanten mit den Hauptrichtungen des Körpers parallel sind. Die Sehrichtung wird nun, wie die Aufgabe selbst verlangt, entweder mit der Diagonalebene a c oder mit der Diagonalebene b d parallel angenommen. Wir entscheiden uns für die mit der Ebene a c parallele Richtung S und bestimmen die spezielle Lage der Sehstrahlen durch den Winkel V, den sie mit der Grundfläche des Körpers bilden sollen. Das dieser Sehrichtung entsprechende Bild des Würfels ist auf die im vorhergehenden Paragraphen erklärte Weise in Figur 6—8 konstruirt worden.

Die in c zusammentreffenden Kanten cb_1, cd_1 und cg_1 des isometrischen Würfelbildes (Figur 8) bilden nun die Projektionsaxen für das darzustellende Bild des Körpers, indem alle Längen, Breiten und Höhen mit diesen drei Kanten parallel werden. Dieselben müssen daher zuerst in ihre naturgemäße Lage gebracht werden, so daß die vertikale Kante cg_1 in der Konstruktionsebene von oben nach unten gerichtet ist. Man zieht daher (Figur 10 und 11) eine unbestimmte Vertikale cz und trage die einander gleichen Winkel $b_1 cg_1$ und $d_1 cg_1$ (Fig. 8) nach xcz_1 und ycz (Figur 10). Sofort konstruire man den zweiarig-isometrischen Grundriß a b c d (Fig. 10) des Körpers nach derselben Methode, als wollte man seinen Grundriß zeichnen, mit dem Unterschiede, daß die Längen- und Breitenrichtungen nicht mehr senkrecht aufeinander stehen dürfen, sondern mit den Projektionsaxen c x und c y parallel gezogen werden müssen. Dagegen bleiben alle Längen und Breiten unverändert.

Durch alle Punkte dieses Grundrisses werden nun parallele Linien mit cz gezogen und auf diesen die Höhen der abzubildenden Punkte aufgetragen, nachdem dieselben vorher in dem Verhältnisse der Linien (Fig. 8) cb_1 und cg_1 verändert worden sind, weil durch die Anwendung des isometrischen Principes die Höhenkante des Würfels im Bilde die Länge cg_1 erhielt. Man kann

diese Veränderung auf zweifache Weise ausführen. Besitzt z. B. jede Würfelkante die Länge irgend einer Linieneinheit, z. B. eines Zolles, so wird im Bilde die Linie cg_1 ebenfalls einen Zoll darstellen, und mit dieser veränderten Linieneinheit konstruire man nun einen zehntheiligen Transversalmaßstab. Wäre aber die Länge einer Würfelkante = 2 oder = 3 Zoll ꝛc., so müßte auch cg_1 im Bilde als eine Länge von 2 oder von 3 Zollen angesehen werden. Man nehme daher die Würfelkanten stets so an, daß sie eine ganze Zahl von Linieneinheiten enthalten, weil im entgegengesetzten Falle noch eine Reduktion auf die Linieneinheit ausgeführt werden müßte. Die Konstruktion eines solchen Transversalmaßstabes ist besonders dann nöthig, wenn man das zweiarig-isometrische Bild eines Körpers unmittelbar konstruiren will und die Längen, Breiten und Höhen am Körper selbst abmißt.

Sind aber, wie im vorliegenden Falle, nur einige wenige Höhendimensionen zu verändern, so geschieht dieß am einfachsten durch einen Proportionalwinkel (Fig. 13), den man auf folgende Weise konstruirt: Man ziehe eine unbestimmte Gerade PO, beschreibe aus P mit einer Würfelseite (Fig. 7) einen unbestimmten Kreisbogen und trage auf diesen die Linie cg_1 (Fig. 8) als Sehne nach cg_1 (Figur 13) auf. Wird sofort Pg_1 gezogen und unbestimmt nach Q verlängert, so ist der Proportionalwinkel OPQ vollendet. Sein Gebrauch ist folgender:

Will man eine Linie, z. B. die Höhe des Punktes (3, 3′) Fig. 16 in dem Verhältnisse der Linien cb_1 und cg_1 verändern, so beschreibt man mit ihr aus P zwischen den Schenkeln des Proportionalwinkels einen Kreisbogen 3—3, und nimmt die Sehne dieses Bogens ab.

Bei der Konstruktion des dis-isometrischen Bildes beginnt man stets mit den höchsten Punkten, Linien und Flächen, damit man sogleich sieht, welche Theile der tiefern Linien und Flächen verdeckt werden, denn diese werden entweder gar nicht oder mit punktirten Linien angezeigt.

Damit endlich das dis-isometrische Bild nicht mit seinem Grundrisse zusammenfalle, wodurch eine Verwirrung von Linien entstehen würde, addire man zu jeder Höhe eine unveränderliche Linie MN

(Fig. 12), welche wenigstens eben so groß als der vertikale Abstand des obersten und untersten Punktes des dis-isometrischen Grundrisses anzunehmen ist.

Irgend ein Punkt 3 des dis-isometrischen Bildes wird also auf folgende Weise bestimmt: Man ziehe durch die dis-isometrische Horizontalprojektion 3 (Fig. 10) eine unbestimmte Vertikale 3—3, nehme aus Fig. 16, oder unmittelbar vom Körper selbst, die Höhe des Punktes (3, 3′) ab, verändere sie, wie vorhin gezeigt wurde, durch den Proportionalwinkel (Fig. 13) und setze die so veränderte Höhe 3—3 (Fig. 13) der Linie MN an, indem man sie nach N—3 (Fig. 15) trägt. Nun wird die Linie M_3 in die Bildebene (Fig. 10 und 11) nach 3—3 übergetragen.

Die Thüre und die Treppen, sowie auch die seitwärts angebrachte Bank des Gartenhauses brauchen im dis-isometrischen Grundrisse nicht angegeben zu werden, weil sie unmittelbar auf die durch Konstruktionslinien angedeutete Weise mittelst des Grund- und Aufrisses (Fig. 16) konstruirt werden können. Soll aus dem Bilde (Fig. 11) die wahre Größe einer Linie A_3 abgeleitet werden, so ziehe man durch ihren tieferen Endpunkt A mit ihrer isometrischen Horizontalprojektion a 3 (Fig. 10) eine Parallele AB, und durch den höheren Endpunkt 3 eine Parallele 3B zur vertikalen Bildaxe cz. Dadurch entsteht ein Dreieck AB3, das in B rechtwinklich gedacht werden muß. Die Kathete AB dieses Dreiecks ist isometrisch, weil sie mit der Bildaxe cy parallel ist; hingegen muß die Kathete B3 in dem Verhältnisse der Linien cg_1 und cb_1 (Fig. 8) verändert werden. Es wird daher in Fig. 14 ein Proportionalwinkel O′P′Q′ konstruirt, worin der Radius des Bogens $c'g' = cg_1$ (Fig. 8) und die Sehne c′g′ dieses Bogens gleich einer Würfelkante (Fig. 8) ist. Sofort beschreibt man mit B_3 (Fig. 11) aus P′ (Fig. 14) den Bogen B3, dessen Sehne die wahre Länge der Kathete B—3 angibt. Endlich wird in Fig. 15 das rechtwinkliche Dreieck konstruirt, worin AB = AB (Fig. 11) und B3 = B3 (Fig. 14) ist. Die Linie A3 (Fig. 15) ist daher die wahre Länge von A—3 (Fig. 11).

Die so eben entwickelte Methode zur Konstruktion zweiarigisometrischer Bilder zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus:

Erstens werden die Längen- und Breitendimensionen auf gleiche Weise berücksichtigt, d. h. die Breiten sind nicht zum Vortheile der Längen schädlich verkürzt, oder umgekehrt. Daher läßt sich schon aus dem bloßen Anblicke eines solchen Bildes sehr leicht auf die Grundform des dargestellten Körpers schließen.

Zweitens kann man einen Körper nach Belieben für jede Lage der Sehrichtung zur horizontalen Projektionsebene darstellen, was keine der folgenden Voraussetzungen über die Hauptlagen der Sehstrahlen erlaubt. Diese Projektionsmethode ist daher vermöge ihrer praktischen Anwendbarkeit für technische Zwecke ganz vorzüglich zu empfehlen.

§. 53.

Die dreiarig-isometrische Projektionsmethode, ihre Anwendung zur Aufnahme von Werkzeugen und Maschinen.

Wenn die Sehrichtung nicht nur mit einer durch zwei vertikale Kanten gelegten Diagonalebene, sondern mit der Diagonale des Würfels selbst parallel ist, dann werden in dem dieser Sehrichtung entsprechenden Bilde, welches durch eine in den Figuren 6, 7 und 9 dargestellte Drehung auf ganz gleiche Weise erhalten wird, wie das zweiarig-isometrische Bild (Fig. 8), die vertikalen Würfelkanten in demselben Verhältnisse wie die horizontalen Kanten verkürzt, und alle mit den Würfelkanten parallelen Längen, Breiten und Höhen eines Körpers können daher isometrisch dargestellt werden. Die von je zwei Würfelkanten (oder von den mit ihnen parallelen Linien) eingeschlossenen Winkel sind $= 60^0$ oder $= 120^0$. Man nennt ein solches Bild die gewöhnliche isometrische oder die dreiarig-isometrische Projektion. Dieselbe kann wegen ihrer außerordentlichen Einfachheit höchst zweckmäßig zur Aufnahme von Werkzeugen und Maschinen, zur Darstellung einzelner Steine eines aus Hausteinen ausgeführten Bauwerkes, zur Angabe der auszuführenden Steinschnitte, sodann bei Holzkonstruktionen und überhaupt in allen denjenigen Fällen angewendet werden, wo man von der Schönheit des Bildes abstrahirt. Denn überall, wo im Raume zwei senkrecht auf einander

stehende Hauptrichtungen vorhanden sind, erscheinen dieselben in dem isometrischen Bilde als zwei Linien, die mit einander einen Winkel von 60° oder von 120° einschließen. In meiner bei Jent und Gaßmann erschienenen isometrischen Projektionslehre habe ich ausführlich erklärt, wie Kreise, krumme Linien, Zylinder-, Kegel-, Kugel- und Umwälzungsflächen isometrisch dargestellt werden können. Ich beschränke mich daher auf eine kurze Auseinandersetzung des bei der Aufnahme von Körpern zu befolgenden Verfahrens, und wähle als Beispiel: die isometrische Darstellung eines nach meinen Angaben konstruirten Universalzirkels (Taf. 6. Fig. 23—31), der mir bei der Konstruktion stereographischer Kugelprojektionen für Himmelskarten bereits ausgezeichnete Dienste geleistet hat. Derselbe besitzt im Allgemeinen die Form eines gewöhnlichen Zirkels und kann auch wie dieser zur Konstruktion kleiner Kreise gebraucht werden. Für solche Kreise, wozu die Schenkel zu kurz sind und deren Halbmesser bis zur Grenze unendlich (∞) anwachsen können, müssen zuvor drei Punkte, entweder durch Konstruktion oder durch Rechnung, bestimmt werden. In diesen Fällen dient der Zirkel als ein beweglicher Peripheriewinkel, dessen Scheitelpunkt in der Axe des Scharnieres liegt; dieses besitzt daher eine von den Scharnieren gewöhnlicher Zirkel ganz abweichende Einrichtung, die wir weiter unten näher erklären werden. Behufs der bildlichen Darstellung dieses Zirkels habe ich denselben so weit geöffnet, daß die Grenzlinien 11—6—4 (Fig. 24) der Schenkel, einen Winkel von 90° einschlossen; sodann wurde sein dreiarig-isometrischer Grundriß konstruirt (S. Fig. 23). Zu diesem Zwecke wurde zuerst die Lage der drei isometrischen Bildaxen Ax, Ay und Az bestimmt, weil die Hauptlinien des um 90° geöffneten Zirkels mit diesen parallel sind, und im Falle sie nicht parallel wären, ihre Richtungen jedenfalls nur mit Hülfe der Bildaxen bestimmt werden könnten. In meinem mehrerwähnten Lehrbuche über die isometrische Projektionslehre ist gezeigt worden, daß alle Kreise, welche in horizontalen Ebenen liegen, in der isometrischen Projektion als Ellipsen erscheinen, deren kleine Axen parallel mit der isometrischen Bildaxe Az sind, während die großen Axen senkrecht auf Az stehen. Dort wurde ferner gezeigt, daß

diese Ellipsen schnell und richtig dadurch erhalten werden können, daß man sich, wie Fig. 25 zeigt, die gegebenen Kreise mit regelmäßigen Achtecken umschlossen denkt, und die isometrischen Projektionen dieser letzteren konstruirt. In diese Achtecke lassen sich dann die Ellipsen sehr leicht einzeichnen. Wir haben zur Verdeutlichung dasjenige Achteck beibehalten, welches den Kreis cc umschließt. Die mit den isometrischen Bildaxen Ax und Ay parallelen Durchmesser der Ellipsen, nämlich aa, bb, cc ꝛc. sind, wie von selbst erhellt, dem wahren Durchmesser der Kreise gleich.

Alle bedeutenden Punkte des isometrischen Grundrisses habe ich mit fortlaufenden Zahlen bezeichnet und die nämlichen Zahlen auch den aus dem Grundrisse abgeleiteten Punkten des Bildes beigesetzt, welches auf folgende Weise ausgeführt wurde: Durch alle Punkte des Grundrisses wurden unbestimmte Parallellinien mit der Axe Az gezogen und mit der Konstruktion der kleinen zylindrischen Hülse aa (Fig. 24) begonnen, deren isometrische Horizontalprojektion die kleine Ellipse aa ist. Vom Mittelpunkte des obersten Kreises der Hülse wurde zuerst ihre Höhe, sodann die Höhe der scheibenförmigen Schraubenmutter bb aufgetragen, welche die Theile des Scharnieres zusammenpreßt. Auf dem Umfange des Kreises cc wurden sofort die Punkte 1 1 bestimmt, und von da herab auf die Vertikalen 1—1 die Dicken der Scharnierplatten aufgetragen, von welchen die eine in Figur 29 im Grund- und Aufriß dargestellt ist. Die genaue Vergleichung des isometrischen Bildes mit dem isometrischen Grundrisse macht jede weitere Erläuterung der Konstruktion überflüssig.

Die Figur 26 erklärt die Konstruktion der elliptischen Bögen, welche die 2 Messingbögen begrenzen, die mittelst der Hülse Fig. 27 zusammengepreßt werden können und den Schenkeln des Zirkels eine unverrückbare Stellung in der beabsichtigten Lage sichern. Der isometrisch gezeichnete Bogen AA′ (Fig. 26) entspricht dem rechten Winkel AmF, welcher in dem isometrischen Grundrisse als ein Winkel AmA′ von 120° erscheint. Auf die Halbmesser mA und mA′ wird eine beliebige Linie, deren Größe von der Länge des Bogens abhängt, so oft als möglich aufgetragen. Durch die erhaltenen Punkte 1, 2, 3 ꝛc. zieht man parallele

Linien zu mF (siehe $_1E$, $_2D$, $_3C$ und $_4B$). Durch dieselben Punkte werden nun auch Parallele 1e, 2d, 3c und 4b zu den isometrischen Axen mA und mA′ gezogen und auf diesen die Kreisordinaten $_1E$, $_2D$, $_3C$, $_4B$ aufgetragen. Der elliptische Bogen AedcdeA′ ist das isometrische Bild des Viertelskreises AF.

Der Gebrauch dieses Zirkels, um durch 3 gegebene Punkte a, b und c im stetigen Zuge einen Kreisbogen zu ziehen, ist folgender:

1. Die Scharnieraxe wird über den mittleren Punkt b (Figur 30) gebracht und auf folgende Weise centrirt. Der Zirkelschlüssel (Fig. 28) ist unten mit 2 feinen Spitzen versehen, deren Abstand genau gleich dem Radius Ac (Fig. 23) des kreisförmigen Zirkelkopfes ist. Man setzt nun die eine Spitze im Punkte b ein und bezeichnet mit der zweiten Spitze 3 bis 4 Punkte 1, 2, 3 ꝛc.; alsdann wird der Zirkel so auf die Ebene gelegt, daß die Punkte 1, 2, 3 ꝛc. im Rande des Zirkelkopfes liegen.

2. Gleichzeitig wird der Rand des linken Schenkels des Zirkels durch den Punkt a (Fig. 30) gelegt, nachdem man zuvor in diesem entweder eine feine Stahlnadel vertikal eingeschlagen, oder einen fünf bis sechs Pfund schweren Zinkblock, von der in Fig. 31 dargestellten Form so aufgestellt hat, daß seine vertikale Kante aa durch den Punkt a geht. Damit derselbe nicht durch einen leichten Seitendruck verschoben werden kann, ist er vertikal durchbohrt, und ein Theil der Durchbohrung schraubenförmig eingeschnitten. Die hineinpassende Schraube S besitzt unten einen feinen Stahlstift, der, sobald man die Schraube gehörig hinuntergeschraubt hat, aus der Basis des Zinkblockes heraustritt und in die Konstruktionsebene, eine unmerkbare Oeffnung bildend, eindringt.

3. Nun wird der rechte Schenkel des Zirkels soweit gedreht, daß sein äußerer Rand durch den Punkt c (Fig. 30) geht, und sofort auch neben diesem ein ähnlicher Zinkblock wie bei a aufgestellt.

4. Die Messingbögen werden nun durch die Hülse Fig. 27 zusammengepreßt und durch die cylindrische Hülse des Scharnieres wird die genau passende, aber leicht auf- und abschiebbare Bleistiftröhre B (Fig. 24) eingesetzt, die Feder F auf den hervorstehenden Theil der Bleistiftröhre aufgelegt und nun bei a (Fig. 30)

anfangend, mit leichtem Druck der Schenkel gegen die Zinkblöcke, der Zirkelkopf nebst Bleistift verschoben, und auf solche Weise im stetigen Zuge der Kreisbogen a b c (Fig. 30) beschrieben.

Folgende Eigenschaften des Zirkels will ich noch kurz erwähnen: Die Linien 11—6 und 10—5, welche die mit den Messingbögen aus einem Stück verfertigten Platten begrenzen, sind zur Axe des Scharnieres A gerichtet, deßgleichen die Linien 9—8, worin die Haltstifte 8 und 9 befestigt sind.

Man kann daher die Messingbögen auch für den gewöhnlichen Zirkel brauchen, mit welchem sie einen sehr genauen Transporteur bilden, wofern man auf dem einen Bogen einen kleinen Nonius anbringt und den andern Bogen in Grade eintheilt.

Ferner ist zu bemerken, daß der Messingbogen des linken Schenkels in einer concentrischen Vertiefung oder Nuthe des rechten Schenkels läuft, welche von der Platte des zweiten Messingbogens bedeckt wird. Dadurch wird es möglich, beide Messingbögen concentrisch über einander zu verschieben. Der den Nonius tragende Bogen ist etwas breiter als der andere.

Wenn die Länge der Schenkel kleiner wäre, als die Entfernung der zwei äußersten Punkte a und c (Fig. 30), durch welche der Kreisbogen gezogen werden soll, so wird ein mittlerer Punkt e dadurch bestimmt, daß man durch c eine unbestimmte Linie c e zieht, und sodann den Winkel b c e nach b a e trägt, was in Fig. 30 mittelst der mit den gleichen Radien c b und a l′ beschriebenen Kreisbögen b k und l′ k′ ausgeführt wurde. Soll unterhalb a ein neuer Punkt d bestimmt werden, so ziehe man b d unbestimmt, und trage den Winkel a b d nach a c d. Im ersten Falle wird der Winkel e gleich dem Winkel b, im zweiten Falle der Winkel d gleich dem Winkel a; daher sind auch e und d Punkte des Kreises.

Von der Konstruktion und den Eigenschaften des Würfelbildes, welches der zweiten Hauptlage der Sehstrahlen entspricht.

§. 54.

Die von uns in §. 49 als zweite Hauptlage der Sehstrahlen

bezeichnete Sehrichtung führt, wie die erste Hauptlage der Sehstrahlen, zu zweiarig-isometrischen Projektionen, welche von Prof. Weißbach monodimetrische Projektionen genannt worden sind. Weder in Prof. Weißbachs Abhandlung noch in der erst kürzlich erschienenen Axonometrie der Herren C. Th. Meyer und M. N. Meyer wird gezeigt, wie die Lagen der drei Bildaxen auf geometrischem Wege gefunden werden können; denn die Herren Verfasser bedienen sich zur Bestimmung derselben trigonometrischer Formeln. Ich habe daher im Folgenden versucht, die für die zweite Hauptrichtung der Sehstrahlen sich darbietenden Aufgaben durch die Methoden der darstellenden Geometrie zu lösen.

§. 55.

Aufgabe.

Man soll das Bild eines horizontal aufgestellten Würfels konstruiren, wenn die Sehstrahlen mit einer durch zwei horizontale Kanten gelegten Diagonalebene parallel sind. (Tafel 5. Fig. 17 und 18.)

Auflösung.

Es sei das Quadrat acge (Fig. 17) die horizontale Projektion, und das Quadrat $a'b'c'd'$ die vertikale Projektion des Würfels; ferner sei $a'c'$ die vertikale Projektion der Diagonalebene, womit die Sehstrahlen parallel sein sollen. Weil hiedurch die Sehrichtung nur allgemein bestimmt ist, so muß dieselbe durch eine zweite Bedingung noch speziell festgesetzt werden. Dieß kann entweder dadurch geschehen, daß man ihre horizontale Projektion gn oder was dasselbe ist, ihren Deklinationswinkel *) nge festsetzt, oder dadurch, daß man den Neigungswinkel $a'_1 c' o' = \varphi$ angibt, welchen die Sehstrahlen mit der horizontalen Projektionsebene einschließen sollen.

Wenn die horizontale Projektion gn der Sehrichtung gegeben ist, so kann man hieraus unmittelbar die vertikale Projektion $c'n'$ ableiten; wird nun die Linie (cn, $c'n'$) um die durch c gehende

*) Man versteht darunter den Winkel, welchen die horizontale Projektion der Sehrichtung mit der Projektionsaxe einschließt.

Vertikale so weit gedreht, bis sie zur vertikalen Projektionsebene parallel ist, so beschreibt der Punkt (n, n') den Kreisbogen no, n'o') und die vertikale Projektion c'o' der gedrehten Sehrichtung bildet mit der Horizontalen c'd' einen Winkel o'c'd' = φ, welcher dem Inclinationswinkel der Sehstrahlen gleich ist.

Wenn umgekehrt der Inklinationswinkel φ gegeben ist, so trägt man diesen an die vertikale Projektion c'd' der Grundfläche des Würfels, bestimmt auf seinem obern Schenkel c'o' den Punkt o' willkührlich, projizirt diesen Punkt nach o und beschreibt mit go einen unbestimmten Kreisbogen; sodann zieht man durch o' die Horizontale o'n' und durch n' die Projizirende n'n, bis sie den Kreisbogen on in dem Punkte n schneidet. Diejenigen Leser, welche mit den Aufgaben über die Drehung der Linien vertraut sind, werden leicht einsehen, daß das eben gezeigte Verfahren nur eine Umkehrung des vorhergehenden ist. Hat man auf solche Weise die Sehrichtung durch ihre Projektionen bestimmt, so wird das gesuchte Bild des Würfels auf folgende Weise erhalten.

Man denke sich den Würfel um die auf der vertikalen Projektionsebene senkrecht stehende Kante (cg, c') soweit gedreht, bis die Diagonalebene c'a' mit der horizontalen Projektionsebene parallel ist. In dieser Lage muß die vertikale Projektion $c'n'_1$ der Sehrichtung parallel mit der Projektionsaxe sein, während ihre horizontale Projektion die Lage gn_1 erhält und mit der Projektionsaxe einen Winkel n_1ge_1 einschließt, welcher dem von der Sehrichtung und der vertikalen Projektionsebene eingeschlossenen Winkel gleich ist.

Um das gewünschte Bild zu erhalten, muß noch eine zweite Drehung ausgeführt werden, welche zum Zwecke hat, dem Würfel und der mit ihm unveränderlich verbundenen Sehrichtung eine auf der vertikalen Projektionsebene senkrechte Stellung zu geben. Während dieser Drehung darf die Diagonalebene $c'a'_1$ ihre parallele Lage zur horizontalen Projektionsebene nicht verlassen, so daß kein Punkt des Würfels seinen Abstand von der horizontalen Ebene verändert. Es muß daher die horizontale Projektion des Würfels, wenn er die dritte Stellung besitzt (siehe Fig. 18), gleich derjenigen in der zweiten Stellung sein. Man trage also diese aus

Fig. 17 in Fig. 18 so über, daß die horizontale Projektion der Sehrichtung, nämlich $g n_1$, auf der Projektionsaxe senkrecht steht. Es bedarf kaum der Bemerkung, daß sich die Lage der Linien gc und ge in Fig. 18 mittelst des mit der Würfelseite gc in Fig. 17 und 18 beschriebenen Bogens or ergibt, indem man denselben aus Fig. 17 in Fig. 18 überträgt.

Wenn die horizontale Projektion, welche der dritten Stellung des Würfels entspricht, in Fig. 18 vollständig ausgeführt ist, so ziehe man (Fig. 17) durch die Punkte c′, b'_1 und d'_1 parallele Linien mit der Projektionsaxe, bis sie die aus den entsprechenden Punkten g, c, b ꝛc. (Fig. 18) gezogene Projicirenden durchschneiden. Dadurch ergibt sich die der dritten Würfelstellung entsprechende Vertikalprojektion (Fig. 18), welche zugleich das gewünschte Bild des Würfels ist, und dem man sofort durch Drehung der Konstruktionsebene eine solche Lage gibt, daß die Höhenkanten g′f′, c′b′, d′a′ und h′e′ eine vertikale Richtung besitzen.

Es lassen sich bei genauerer Betrachtung an diesem Bilde ganz analoge Eigenschaften nachweisen, wie an demjenigen, welches der ersten Hauptrichtung der Sehstrahlen entspricht (Siehe §. 50).

Man erkennt nämlich und kann auf ganz elementarem Wege beweisen:

1) Daß die Projektionen g′f′ und g′h′ derjenigen zwei Würfelkanten, welche mit der Sehrichtung gleiche Winkel einschließen, oder deren Winkel von der Diagonalebene a′c′ (Fig. 17) halbirt wird, gleich sind. Es müssen daher alle mit diesen Kanten parallele Linien auf gleiche Weise verkürzt erscheinen.

Dagegen erscheint die Projektion g′c′ der dritten Kante des Punktes g′ um so kürzer, je größer der Deklinationswinkel egn (Fig. 17) der Sehrichtung ist. Das Verhältniß der Projektionen g′c′ und g′f′ oder g′c′ und g′h′ kann daher bis zur Grenze Null abnehmen, in welchem Fall das Bild (Fig. 18) in die gewöhnliche Vertikalprojektion (Fig. 17) übergeht.

Diese Eigenschaft gibt die Mittel an die Hand, das Bild eines Körpers nach Länge und Höhe oder nach Breite und Höhe isometrisch auszuführen, und zugleich die Bedingung zu erfüllen, daß die mit der dritten Hauptrichtung parallelen Linien im Bilde

bestimmte aliquote Theile der ursprünglichen Längen besitzen, z. B. **zweimal**, **dreimal** oder $\frac{n}{m}$ mal kleiner sind als jene.

2) Erkennt man, daß die anisometrische (nicht-isometrische) Würfelkante $g'c'$ des Bildes mit den isometrischen Kanten $g'f'$ und $g'h'$ gleiche Winkel einschließt, oder daß ihre Verlängerung den von den isometrischen Kanten eingeschlossenen Winkel $f'g''h'$ halbirt.

Von der Konstruktion zweiarig-isometrischer Bilder, welche der zweiten Hauptlage der Sehstrahlen entsprechen.

§. 56.

Aufgabe.

Man soll das zweiarig-isometrische Bild eines beliebigen Körpers konstruiren, wenn die Sehstrahlen mit einer durch zwei horizontale Kanten gelegten Diagonalebene eines horizontal aufgestellten Würfels parallel sind, und gleichzeitig die Kanten dieses Würfels mit der Längen-, Breiten- und Höhenrichtung des Körpers parallel sind (Taf. 5, Fig. 16, 17, 18, 19, 20 und 21).

Auflösung.

Der Körper kann entweder selbst (in natura) oder durch seine geometrischen Projektionen (Fig. 16) gegeben sein. In beiden Fällen konstruire man zuerst das der gegebenen Sehrichtung entsprechende Bild eines Würfels (Fig. 17 und 18), dessen Kanten von beliebiger Größe oder mit Bezugnahme auf den Körper bestimmt werden können.

Behalten wir die Sehrichtung der vorhergehenden Aufgabe bei, so daß S (Fig. 16) mit gn (Fig. 17) parallel ist, so ist die vertikale Projektion des Würfels in Fig. 18 das derselben entsprechende Würfelbild, dem man in Gedanken eine solche Stellung zu geben hat, daß die Höhenkanten $g'f'$ ꝛc. eine vertikale Richtung erhalten. Soll nun das Bild des Würfels und des Körpers nach den Hauptrichtungen $g'f'$ und $g'h'$, also die Höhen und Längen, isometrisch werden, so trage man die Länge einer Würfelkante aus

Fig. 17 auf g'f' oder g'h' (Fig. 18) nach g'z' und g'y', ziehe f'c' oder h'c' und parallel mit diesen Linien z'x' oder y'x', wodurch sich die Länge g'x' der dritten Würfelkante ergibt, wenn die zwei andern im Bilde isometrisch erscheinen (vergleiche §§. 51 und 52). Es müssen also auch alle mit cx (Fig. 16) parallele Linien in dem Verhältnisse der Linien g'z' und g'x' verkürzt werden. Wäre z. B. dieses Verhältniß = $\frac{1}{2}$, so werden alle mit cx (Fig. 16) parallele Linien in dem Bilde halb so groß erscheinen als sie wirklich sind. Ist aber das Verhältniß nicht so einfach, so bedient man sich entweder eines Proportionalwinkels BAC (Fig. 21), worin BC : AB (Fig. 21) = gz' : gx' (Fig. 18) ist, oder man konstruirt einen Transversalmaßstab, dessen Längeneinheit sich zur wirklichen verhält wie die Linien g'x' und g'z'. Wenn diese vorbereitenden Konstruktionen ausgeführt sind, so konstruirt man zuerst den zweiarig-isometrischen Grundriß des Körpers (Fig. 19), worin jedoch nur wesentliche Linien und Punkte d. h. nur solche aufzunehmen sind, welche die Hauptpartheieen des Bildes bestimmen. In der That wäre es in doppelter Beziehung unzweckmäßig, in dem Grundrisse mehr Linien anzuzeigen, als durchaus nöthig sind, weil sie einerseits den Grundriß undeutlich machen, und weil zweitens ein großer Theil derselben eben so leicht, ja öfters mit noch weniger Mühe, unmittelbar aus den Hauptlinien des Bildes selbst abgeleitet, und somit Zeit und Arbeit erspart werden kann.

Wie ein solcher Grundriß zu zeichnen sei, ergibt sich aus den in §. 52 gegebenen Erklärungen fast von selbst. Man macht wie dort die Winkel (Fig. 19 und 20) xay, xaz und yaz, welche die Bildaren ax, ay und az einschließen, gleich den Winkeln x'g'y', x'g'z' und y'g'z' (Fig. 18); dieß geschieht am richtigsten dadurch, daß man zuerst den Winkel yaz (Fig. 19) gleich dem Winkel y'g'z' (Fig. 18) macht, sodann halbirt und die Halbirungslinie nach ax verlängert. Man konstruirt nun den Grundriß des Körpers gerade so, als ob man seinen geometrischen Grundriß zu konstruiren habe, mit denjenigen zwei Modifikationen, daß 1) alle Längen, Breiten und Höhen mit den Bildaren parallel gezogen werden, also nicht rechte, sondern spitze und stumpfe Winkel

mit einander bilden, und 2) daß alle mit der Bildare a x parallele Linien in dem Verhältnisse von AB : BC (Fig. 21) oder von g'z' : g'x' (Fig. 18) verkürzt erscheinen. Wenn auf solche Weise der zweiarig-isometrische Grundriß des Körpers ausgeführt worden ist, so werden durch alle Punkte, welche die Horizontalprojektionen höher liegender Punkte oder vertikaler Linien darstellen, parallele Linien zur vertikalen Bildare a z gezogen, und auf diesen die Höhen der entsprechenden Punkte, nachdem dieselben um eine konstante Linie MN (Fig. 20[a]) vergrößert worden sind (vergleiche §. 52), aufgetragen.

§. 57.

Aufgabe.

Man soll das zweiarig-isometrische Bild eines horizontal aufgestellten Würfels konstruiren, wenn eine der beiden horizontalen Kanten anisometrisch aber nach einem gegebenen Verhältnisse verkürzt erscheinen soll.

Auflösung.

Diese Aufgabe (ohne Zweifel die wichtigste im Gebiete der zweiarig-isometrischen Parallelperspektive) kann nach den Methoden der darstellenden Geometrie nur annähernd richtig gelöst, aber der Fehler durch die Wiederholung einer sehr leichten Versuchskonstruktion auf ein so kleines Maß zurückgeführt werden, daß das erhaltene Resultat als richtig angesehen werden darf. Uebrigens ist die streng-mathematische Lösung in §. 13 der analytischen Abhandlung und die darauf sich stützende direkte geometrische Lösung in §. 20 mitgetheilt worden. (Siehe ferner §§. 64—66.)

Wir wollen beispielsweise annehmen, daß sich die anisometrische Kante g'x' (Fig. 18) des zweiarig-isometrischen Würfelbildes zu den beiden isometrischen Kanten g'z' und g'y' wie 1 zu 2 verhalten solle. Es entsteht nun zuerst die Frage: welche Winkel werden unter dieser Bedingung die Projektionen der drei Würfelkanten oder die Bildaren unter sich einschließen? Zu diesem Zwecke denken wir uns den Würfel (Fig. 17) bereits so gedreht, daß die vertikal

Projektion der anisometrischen Kante g c mit der Projektionsaxe parallel ist (siehe g′ c′ Fig. 18) und bestimmen sodann die Lagen der Projektionen g′ f′ und g′ h′ der zwei isometrischen Würfelkanten. Dieß geschieht nun auf folgende Weise:

Man beschreibe aus dem beliebig zu wählenden Punkte a′ (Figur 22) mit einer beliebigen Linie, welche die Länge einer Würfelkante darstellt, einen ganzen Kreis, ziehe durch a′ eine Parallele $a' x'_1$ zur Projektionsaxe und mache $a' x'_1$ gleich der Hälfte einer Würfelkante, wie die Aufgabe festsetzt. Zum Ueberflusse bemerken wir, daß diese Linie $a' x'_1$ der Würfelkante g′ x′ (Fig. 18) entspricht. Durch a′ wird nun die Projizirende a′a gezogen, auf dieser der Punkt a als Horizontalprojektion von a′ willkührlich bestimmt, und aus a mit demselben Halbmesser wie oben ein Halbkreis beschrieben.

Da die Würfelkante g′ c′ (Fig. 18) mit der horizontalen Projektionsebene parallel und demnach die horizontale Projektion g c gleich der Kante selbst ist, so projiziren wir in Fig. 22 den Punkt x'_1 auf den Halbkreis nach x_1; dann ist $a x_1$ die zu $a' x'_1$ gehörende Horizontalprojektion, und die auf $a x_1$ senkrecht errichtete Linie $a y_1$, entspricht der horizontalen Projektion g e (Fig. 18) der Würfelfläche; die horizontalen Projektionen der beiden andern Würfelkanten müssen daher mit $a y_1$ zusammenfallen.

Wir konstruiren nun, um ihre vertikalen Projektionen $a' z'_1$ und $a' y'_1$ zu erhalten, diejenigen Lagen a′ z′ und a′ y′, welche sie nach der ersten in Fig. 17 ausgeführten Drehung besitzen und worin sie unter sich einen rechten Winkel, mit der Verlängerung von $a' x'_1$ aber, Winkel von 45° einschließen. Die Punkte y′ und z′ ergeben sich demnach dadurch, daß man die rechten Winkel A a′ B und A a′ C durch die Linien a′ z′ und a′ y′ halbirt und ihre Durchschnitte mit dem Kreise C A B bestimmt. Die Punkte z′ und y′ werden nun nach y projizirt und sofort die Linie a y in die Lage $a y_1$ gedreht. Dadurch beschreiben die Punkte y und z zwei Kreisbögen, deren horizontale Projektion der Bogen $y y_1$ ist, während ihre vertikalen Projektionen, die mit der Projektionsaxe parallelen Linien $z' z'_1$ und $y' y'_1$ sind. Die Punkte z'_1 und y'_1 werden endlich durch den Punkt y_1 bestimmt und sodann mit a′ verbunden.

Es sind nun aber $a'y'_1$ und $a'z'_1$ nicht die richtigen Lagen der zwei isometrischen Würfelkanten; denn die Linie $a'x'_1$ sollte $= \frac{1}{2} a'z'_1$ oder $= \frac{1}{2} a'y'_1$ sein, während sie größer, nämlich $= \frac{1}{2} a'z'$ oder $= \frac{1}{2} a'y'$ ist.

Man korrigirt daher das erhaltene Resultat, indem man $a'x'_2$ gleich $\frac{a'z'_1}{2}$ oder $= \frac{a'y'_1}{2}$ macht, und sodann wie vorhin aus x'_2, die Kante ax_2, und sodann die Linie ay_2 und zuletzt aus y_2 die neuen Lagen $a'y'_2$ und $a'z'_2$ der isometrischen Würfelkanten ableitet.

Der noch übrige Fehler dieses zweiten Konstruktionsresultates ist nun bereits so unbedeutend, daß er ganz wohl vernachläßigt werden darf. Denn die Kante $a'x'_2$ sollte $= \frac{1}{2} a'y'_2$ sein, während sie $= \frac{1}{2} a'y'_1$ ist; der Fehler erreicht also die Größe $(\frac{1}{2} a'y'_2 - \frac{1}{2} a'y'_1) = \frac{1}{2} (a'y'_2 - a'y'_1)$ und ist, wie die Betrachtung der Figur zeigt, so klein, daß durch eine dritte Näherungskonstruktion die Lage der Bildaren, welche wir durch die zweite Konstruktion gefunden haben, kaum merkbar verändert werden würde.*)

Es sind also die Winkel $z'_2a'x'_2$, $z_2'a'y'_2$ und $x'_2a'y'_2$ die Winkel der drei Bildaren, und es bedarf jetzt nur einer Wiederholung der in den Figuren 19 und 20 ausgeführten Operationen, um mit Hülfe dieser Winkel das zweiarig-isometrische Bild eines beliebigen Körpers abzuleiten.

Wir bemerken schließlich, daß diese Aufgabe nur ein besonderer Fall der in §. 61 behandelten Aufgabe ist, und daher in §. 62 noch einmal gelöst wurde.

§. 58.

Wir haben nun noch den Fall zu betrachten, wenn ein zweiarig-isometrisches Bild (Fig. 20 und Fig. 38) eines Körpers vorliegt und zum Verständnisse und zur richtigen Benutzung desselben, aus den Winkeln, welche die Bildaren einschließen, 1) das Verkürzungsverhältniß der anisometrischen Are und 2) die Richtung der Sehstrahlen

---

*) Man kann leicht beweisen, daß $a'x'_1$ zu groß, sodann $a'x'_2$ zu klein und eine dritte Bestimmung wieder zu groß ausfällt, kurz: daß die aufeinander folgenden Bestimmungen der anisometrischen Würfelkante von der ersten anfangend, abwechselnd zu groß und zu klein sind.

bestimmt werden soll. Hierzu führt die Betrachtung der Fig. 18. Denn da sie lehrt, wie nach der zweiten Drehung des Würfels, aus der horizontalen Projektion desselben (Fig. 18) und aus der Vertikalprojektion (Fig. 17), die Vertikalprojektionen g′f′, g′h′ und g′c′ der Würfelkanten hergeleitet werden können, so enthält sie auch den Schlüssel zur Lösung der obigen Aufgabe, welche verlangt, daß aus den Hauptrichtungen des Bildes, welche offenbar mit den Vertikalprojektionen g′f′, g′h′ und g′c′ der drei Würfelkanten (Fig. 18) identisch sind, das Verkürzungsverhältniß der anisometrischen Axe a x (Fig. 19) und die Richtung der Sehstrahlen bestimmt werden soll. Man wird nämlich den Bildaren a x, a y und a z (Fig. 19 und 20) zuerst die in Fig. 22 angezeigte Lage geben, worin die anisometrische Bildare $a'x'_2$ mit der Projektionsare parallel ist. Sofort werden auf den Richtungen der isometrischen Bildaren beliebige, aber gleiche Längen $a'z'_2$ und $a'y'_2$ aufgetragen, und durch a′ zwei Linien a′z′ und a′y′ gezogen, welche unter sich einen rechten Winkel z′a′y′ und mit der Verlängerung von $a'x'_2$ Winkel von 45° einschließen. Zieht man nun durch z'_2 und y'_2 parallele Linien mit der Projektionsare, so schneiden diese die Linien a′z′ und a′y′ in den Punkten z′ und y′, und die Linien a′z′ und a′y′ zeigen die Längen der Würfelkanten an, welche den Projektionen $a'z'_2$ und $a'y'_2$ entsprechen.

Die horizontalen Projektionen $a y_2$ derselben ergeben sich nun dadurch, daß man aus a′ den Punkt a, und aus z′ oder y′ den Punkt y bestimmt, sodann mit a y einen Bogen beschreibt und auf diesen die Punkte y'_2 und z'_2 nach y_2 projizirt. Dadurch ergibt sich die horizontale Projektion $a y_2$ der Würfelfläche, welche die isometrischen Aren enthält und somit auch die Richtung der horizontalen Projektion $a x_2$ der auf ihr senkrechten Würfelkante. Man mache nun diese gleich a′y′ und projizire x_2 nach x'_2. Das Verkürzungsverhältniß der anisometrischen Bildare ist offenbar $= \frac{a'x'_2}{a'y'_2}$ oder $= \frac{a'x'_2}{a'z'_2}$

Die Linie a n, welche auf der Projektionsare senkrecht steht, bestimmt die Lage der Sehrichtung. Denn dreht man den Würfel in seine zweite Stellung (Fig. 17) zurück, so ergibt sich mittelst

des Winkels $x_2 a n$ (Fig. 22) die Linie $g n_1$, und wenn man hierauf den Würfel in seine ursprüngliche Stellung zurückführt, so können aus der Linie $g n_1$ die Projektionen $g u$ und $c' n'$ der Sehrichtung, sowie der Winkel φ abgeleitet werden.

§. 59.

Ueber die Vor- und Nachtheile der zweiarig-isometrischen Projektionen, welche der zweiten Hauptrichtung der Sehstrahlen entsprechen.

Die Vorzüge der isometrischen Bilder, welche der zweiten Hauptrichtung der Sehstrahlen entsprechen, sind zweierlei Art:

Erstens sind dieselben in gewissen Fällen gefälliger für das Auge, als die zweiarig-isometrischen Bilder der ersten Art, zumal wenn der Körper mehr von vorn als von der Seite angesehen werden soll; sie nähern sich alsdann den polar-perspektivischen Bildern, bei welchen der Augenpunkt gut gewählt wurde, und sind deßhalb ganz vorzüglich dem Architekten zu empfehlen. Das in Fig. 38 auf Tafel 6 gegebene Beispiel, welches ich der Axonometrie der Herren Meyer entlehnt habe, leistet einen augenfälligen Beweis für diese Behauptung.

Zweitens kann man das Bild stets so ausführen, daß die verkürzten (anisometrischen) Dimensionen zu den isometrischen in einem sehr einfachen Verhältnisse stehen, z. B. in den Verhältnissen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ rc., wodurch offenbar die Konstruktion solcher Bilder sehr erleichtert wird.

Herr Professor Weißbach hat sich daher ein unbestreitbares Verdienst erworben, daß er auf diese Wahl der Sehrichtung aufmerksam gemacht hat.

Als Nachtheile solcher Bilder, gegenüber denjenigen, welche der ersten Hauptrichtung der Sehstrahlen entsprechen, lassen sich folgende anführen:

Erstens werden die Dimensionen der anisometrischen Richtung, wenn das Bild einen vortheilhaften Eindruck machen soll, so bedeutend verkürzt, daß hiedurch die praktische Anwendbarkeit desselben wesentlich benachtheiligt wird.

Zweitens wird, wenn nicht das Verkürzungsverhältniß der anisometrischen Bildare neben der Zeichnung angegeben ist, die richtige Vorstellung von der wahren Gestalt des Körpers sehr erschwert.

Die Grundaufgaben der einaxig-isometrischen Projektionsmethode.

Von der Konstruktion des Würfelbildes, welches der dritten Hauptlage der Sehstrahlen entspricht*)

§. 60.

Erste Aufgabe.

Man soll das Bild eines horizontal aufgestellten Würfels konstruiren, wenn die Sehstrahlen mit keiner Diagonalebene des Würfels parallel sind, sondern eine willkührliche Lage besitzen (Taf. 6. Fig. 32, 33, 34 und 37).

Auflösung.

Es sei Fig. 32 (Taf. 6) abxy die horizontale Projektion und a′y′d′z′ die vertikale Projektion des gegebenen Würfels, sowie an und a′n′ die Projektionen eines durch (a, a′) gezogenen Sehstrahles, mit welchem alle übrigen parallel seien.

Man ertheile dem Würfel eine solche Drehung, daß die Grundfläche in der horizontalen Projektionsebene bleibt und der Sehstrahl (an, a′n′) mit der vertikalen Projektionsebene parallel wird. (Siehe Fig. 33.)

Dadurch wird sich die horizontale Projektion des Würfels nur der Stellung nach verändern, weil nun an (Fig. 33) mit der Projektionsare parallel ist. Man kopirt daher zuerst über an (Fig. 33) die horizontale Projektion Fig. 32 und leitet sodann aus dieser die vertikale Projektion Fig. 33 her. Nun drehe man

*) Die folgenden Aufgaben haben nach unserer Ansicht mehr theoretische als praktische Bedeutung, weil der technische Zeichner seine Zwecke in den meisten Fällen mit den beiden Arten der zweiaxig-isometrischen Projektionsmethode erreichen wird.

den Würfel so um den Eckpunkt a, a′, daß die Sehrichtung (a n, a′n′) mit der vertikalen Projektionsebene parallel bleibt und zuletzt auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht steht. (Siehe Fig. 34.) Bei dieser neuen Stellung des Würfels muß offenbar der Grundriß desselben in Fig. 34 das gewünschte Bild sein.

Da durch die zweite Drehung die Punkte des Würfels ihre Entfernung von der vertikalen Projektionsebene nicht verändern, so kann die vertikale Projektion (Fig. 34) nur der Stellung nach von derjenigen in Fig. 33 verschieden sein. Man kopire daher diese letztere über der auf der Projektionsaxe senkrecht stehenden Linie a′n′, welches am schnellsten mittelst der aus den Punkten a′ (Fig. 33 und 34) beschriebenen Kreisbögen geschieht und leite sofort die horizontale Projektion (Fig. 34) aus derjenigen in Fig. 33 und aus der vertikalen Projektion in Fig. 34 ab.

Um das Würfelbild nach irgend einer Hauptrichtung, z. B. in derjenigen von a y isometrisch zu machen, wird auf a y (Fig. 34) die wahre Länge einer Würfelkante nach $a y_1$ getragen; sofort zieht man durch y_1, parallel mit y z die Linie $y_1 z_1$ und parallel mit x z, die Linie $z_1 x_1$. Um endlich dem Würfelbilde die naturgemäße Stellung zu geben, muß man die horizontale Projektion (Fig. 34) so drehen, daß die Höhenkante $a z_1$ eine vertikale Richtung besitzt, oder auch diese Projektion so kopiren, daß die Linie a z in der Kopie in vertikaler Lage erscheint.

Wollte man mit Hülfe dieses Würfelbildes irgend einen andern Körper für dieselbe Sehrichtung darstellen, so müßten zuerst die Proportionalwinkel BAC und BAD in Fig. 37 konstruirt werden, durch welche alle mit den Bildaxen $a x_1$ und $a z_1$ parallele Linien in den Verhältnissen $\frac{a x_1}{a y_1}$ und $\frac{a z_1}{a y_1}$ verändert werden können. Man beschreibt zu diesem Zwecke mit $AB = a y_1$ aus einem beliebigen Punkte A (Fig. 37) einen Kreisbogen und trägt auf diesen aus dem Punkte B die Würfelkante $a x_1$ von B nach C und die Kante $a z_1$ von B nach D; sodann werden die Linien AC und AD gezogen.

Aus der Betrachtung des Würfelbildes in Fig. 34 sieht man, daß die einaxig-isometrischen Projektionen sich nur wenig von

den zweiarig-isometrischen Projektionen unterscheiden, so lange der Deklinationswinkel (Fig. 32) y a n der Sehrichtung a n nahe bei 90° liegt. Wenn aber dieser Winkel dem Winkel von 45° näher liegt, als demjenigen von 90°, dann wird bei den dis-isometrischen Projektionen der zweiten Art der Neigungswinkel der Sehstrahlen schon ziemlich groß, und da nun die Projektionen nicht mehr schön werden, so tritt hier der Fall ein, wo man sich für eine mono-isometrische Projektion entscheiden wird, im Falle eine dis-isometrische Projektion der ersten Art, welche sich jetzt als die zweckmäßigste darbietet, nicht belieben sollte.

Wir halten es nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen für überflüssig, auch hier wieder zu zeigen, wie aus dem gefundenen Würfelbilde dasjenige eines andern Körpers abgeleitet werden kann, weil wir nur wiederholen müßten, was bereits ausführlich in §. 52 und §. 56 gesagt worden ist. Wir gehen daher unmittelbar zur Lösung folgender zweiten Grundaufgabe der einarig-isometrischen Projektionsmethode über.

§. 61.

Zweite Aufgabe.

Man soll das einarig-isometrische Bild eines horizontal aufgestellten Würfels konstruiren, wenn die Kante ay (Fig. 32) isometrisch, die zweite horizontale Kante und die Höhenkante aber nach gegebenen Verhältnissen verkürzt erscheinen sollen. Zugleich soll man untersuchen, zwischen welchen Grenzen die Verkürzungsverhältnisse der drei Würfelkanten willkührlich angenommen werden dürfen. (Siehe Taf. 6, Fig. 35.)

Auflösung.

Nehmen wir an, das Verkürzungsverhältniß der die Breitenrichtung repräsentirenden Würfelkante a x (Fig. 32) sei $= \frac{1}{2}$, so ist klar, daß, wenn wir uns den Würfel, dieser Bedingung gemäß, über der horizontalen Projektionsebene aufgestellt denken, der Endpunkt (Fig. 35) (x, x′) der Breitenkante (a x, a′ x′) in einer auf der horizontalen Projektionsebene senkrecht stehenden Zylinderfläche A, A′ liegen muß, deren Grundfläche ein Kreis ist, dessen Radius die

halbe Länge einer Würfelkante besitzt. Nimmt man gleichzeitig diese Kante parallel zur vertikalen Projektionsebene an, so wird ihre horizontale Projektion a x parallel zur Projektionsaxe sein, und ihre vertikale Projektion a′ x′ wird so lang sein, als die Kante selbst.

Der Punkt x′ wird daher bestimmt, wenn man mit der Länge einer Würfelkante aus a′ einen Kreis beschreibt und die vertikale Projektion A′ der Zylinderfläche konstruirt, deren Grundfläche ein Kreis mit dem Radius $= \frac{1}{2}$ a′ x′ ist.

Da nun die Höhen- und die Längenkante des Würfels in einer Ebene liegen, welche auf der Breitenkante (a x, a′x′) senkrecht steht, so ist klar, daß die vertikalen Projektionen jener Kanten in einer auf (a x, a′x′) senkrechten Linie a′ y′ z′ liegen müssen, welche die vertikale Projektion dieser Ebene darstellt.

Nehmen wir nun an, die horizontale Projektion der Höhenkante (a z, a′ z′) sei gleich der Linie a B und diese gleich $= \frac{11}{12}$ a′ x′, so wird der Endpunkt der vertikalen Projektion der Kante 1) in der vertikalen Projektion der Zylinderfläche liegen, deren kreisförmige Grundfläche den Halbmesser a B besitzt, welcher $= \frac{11}{12}$ a′ x′ ist; 2) wird er in einer Kugelfläche liegen, deren Halbmesser = a′x′ ist; er liegt also in dem kreisförmigen Durchschnitte B′B′ dieser zwei Flächen; endlich liegt er 3) in der Ebene a′ y′ z′, also in demjenigen Punkte z′, wo der Kreis B′ B′ von a′ z′ durchschnitten wird; aus dem Punkte z′ ergibt sich unmittelbar die auf dem Kreise B liegende Horizontalprojektion z. Wenn also a x, a′x′ die Projektionen der Breitenkante sind, so müssen a z, a′z′ die Projektionen der Höhenkante sein, und wir haben also nur noch die Lage der Längenkante zu suchen. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Ebene a′z′ um die horizontale Drehungsaxe a a′ in die horizontale Projektionsebene niedergelegt. Dadurch kommt a z nach a Z und die noch unbekannte Linie a y muß in eine zu a Z senkrechte Lage a Y kommen, deren vertikale Projektion in a′ Y′ liegt. Dreht man daher die Linie a Y, a′ Y′, wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück, so beschreibt der Punkt (Y, Y′) den Bogen (Y′y′, Y y) und aus y′ ergibt sich sofort der

Punkt y und die Linie ay als die horizontale Projektion der dritten Würfelkante.

Nachdem die Lagen der 3 Würfelkanten ax, ay, az auf solche Weise bestimmt sind, ist leicht zu bemerken, daß wenn die Längenkante ay isometrisch oder $=$ ay_1 genommen wird, auch die Kanten ax und az in demselben Verhältnisse vergrößert werden müssen, so daß also ax nicht mehr $= \frac{1}{2}$ ay_1 und az nicht mehr $= \frac{11}{12}$ ay_1 sein wird. Es ist daher unsere Lösung nur annähernd richtig, und man wird eine genauere Lösung dadurch erzielen, daß man ax $= \frac{1}{2}$ ay, sowie az $= \frac{11}{12}$ ay nimmt und nun, ganz wie oben geschehen ist, die Lagen von ay und az neu bestimmt. Der dieser zweiten Bestimmung anhaftende Fehler wird dann so unbedeutend sein, daß er vernachläßigt werden darf.

Will man den Winkel wissen, welchen die Sehrichtung (a, a′n′) mit der Grundfläche des Würfels oder mit der Ebene der Kanten ax und ay bildet, so bemerke man, daß derselbe denjenigen Winkel, welchen die Sehrichtung mit der Kante (az, a′z′) einschließt, zu 90⁰ ergänzt. Man drehe daher den Winkel n′a′z′ um die Horizontale az, bis er mit der horizontalen Projektionsebene zusammenfällt. Der Punkt z, z′ erhält dadurch die Lage des Punktes T, welcher sich auf dem größten Kreise YZT der Kugelfläche befindet, deren Halbmesser gleich der Würfelkante ist; die Sehrichtung (a, a′n′) aber fällt nach aN, senkrecht auf az. Die Sehrichtung bildet daher mit der Höhenkante des Würfels den Winkel TaN und mit der Grundfläche des Würfels den Winkel Taz, weil dieser $= 90^0 -$ TaN ist. Wir bemerken noch, daß die Winkel, welche die Würfelkanten (az, a′z′) und (ay, a′y′) mit der horizontalen Projektions- oder mit der Bildebene einschließen, einfach dadurch erhalten werden, daß man die genannten Kanten um die durch (a, a′) gehende Vertikale (a, a′n′) dreht, bis sie mit der vertikalen Projektionsebene parallel sind. Durch diese Drehung kömmt (az, a′z′) nach (a′B′, aB) und der Winkel B′A′C′ ist gleich dem Winkel, den sie mit der Bildebene einschließt. Die Kante (a′y′, ay) haben wir nach a′u′ gedreht und dadurch den Winkel u′a′v′ erhalten.

Will man mittelst der drei Würfelkanten ax, ay und az das Würfelbild konstruiren, so muß der Kante az eine vertikale Lage gegeben werden. Die Winkel zax und zay, welche die beiden andern Kanten mit az einschließen, werden mit Hülfe des innern Kreises übergetragen. Die übrigen Konstruktionen ergeben sich nun auf selbst verständliche Weise.

Wir haben noch zu untersuchen, zwischen welchen Grenzen die Verkürzungsverhältnisse der Würfelkanten willkürlich angenommen werden dürfen. Aus der Konstruktion, die vorausgegangen ist, erhellt von selbst, daß die Lage und das Verkürzungsverhältniß der dritten Kante von den Verkürzungsverhältnissen der beiden andern abhängig ist. Man kann nun offenbar dem Würfel eine solche Stellung auf einer Ebene geben, daß 1) eine Kante auf derselben senkrecht steht, oder 2) einen schiefen Winkel mit ihr bildet, oder 3) parallel zu ihr ist. Im ersten Falle wird ihre horizontale Projektion ein Punkt, also die Länge derselben, sowie ihr Verkürzungsverhältniß = Null sein; im dritten Falle ist die horizontale Projektion gleich der Kante selbst, also ihr Verkürzungsverhältniß = 1; im zweiten Falle endlich ist das Verkürzungsverhältniß der horizontalen Projektion irgend ein ächter Bruch; die Werthe des Verkürzungsverhältnisses der Projektion einer Würfelkante können also zwischen 0 und 1 liegen und wir dürfen demzufolge der Kante (ax, a′x′) Fig. 35 jede beliebige Lage zur Bildebene geben. Dagegen können die beiden anderen Kanten (az, a′z′) und (ay, a′y′), sobald die Lage der Kante (ax, a′x′) gegeben ist, nicht aus der Ebene a′y′z′ heraustreten, welche auf (ax, a′x′) senkrecht steht. Da nun ihre Endpunkte (y, y′) und (z, z′) auf den kreisförmigen Durchschnitten (BB, B′B′) und (uyu, u′u′) einer Kugelfläche und zweier Zylinderflächen liegen müssen, von welchen die Kugelfläche einen Halbmesser gleich der Länge einer Würfelkante hat, während die horizontalen Projektionen oder die Leitlinien der Zylinderflächen Kreise sind, deren Radien die horizontalen Projektionen az urd ay der beiden Würfelkanten bilden, welche in der Ebene a′y′z′ liegen, so ist klar, daß das Verkürzungsverhältniß von einer dieser Kanten z. B. von (az, a′z′) nur zwischen solchen Grenzen gewählt werden kann,

daß der Kreis (B′B′, B B) die Ebene a′z′p′ noch durchschneidet; es sind aber die Linien p′p′ und C′v′ die zwei äußersten Lagen des Durchschnittes (B B, B′B′) der Kugel- und Zylinderfläche. Fällt nun B′B′ mit p′p′ zusammen, so liegt die vertikale Projektion der Würfelkante a′z′ in a′p′ und ihre horizontale Projektion in a p; die horizontale Projektion der andern Würfelkante muß daher nach a q fallen und ihre vertikale Projektion in a′ liegen. Fällt aber B′B′ mit C′v′ zusammen, so liegt die vertikale Projektion der Würfelkante a′z′ in a′, also ihre horizontale Projektion in a q, und demnach die horizontale Projektion der andern Kante in a p. Dieser Fall ist also mit dem vorhergehenden identisch, und unter beiden Voraussetzungen geht die einarig-isometrische Projektion des Würfels in eine solche über, wo die Ebene der Kanten (a x, a′x′) und (a z, a′z′) oder der Kanten (a x, a′x′) und (a y, a′y′) auf der Bildebene senkrecht steht. Ist also (Fig. 35) $\frac{a x}{a'x'}$ das willkührlich bestimmte Verkürzungs-Verhältniß einer beliebigen Würfelkante, so muß das Verkürzungs-Verhältniß einer zweiten Kante größer als $\frac{a p}{a'x'}$ sein; denn wenn es kleiner angenommen wird, so liegt B′B′ über dem Punkte p′ und die Aufgabe wird unmöglich, hingegen muß es selbstverständlich, kleiner als 1 sein.

§. 62.

Lösung eines besondern Falles der vorhergehenden Aufgabe.

Wir haben in §. 57 auf eine zweite Lösungsmethode der dort behandelten Aufgabe hingewiesen, denn diese ist in der That nur ein besonderer Fall der vorhergehenden Aufgabe. Ist nämlich die Bedingung gestellt, daß zwei Würfelkanten, z. B. a y und a z (Fig. 36) isometrisch und die dritte a x in einem bestimmten Verhältnisse, das wir $= \frac{1}{2}$ setzen wollen, verkürzt erscheine, so ist klar, daß, weil die Ebene der Kanten a y und a z auf der Kante a x senkrecht steht und zugleich die horizontale Projektion der Kante a x den Winkel der Kanten a y und a z halbiren muß, die vertikalen Projektionen dieser zwei Kanten zusammenfallen werden,

wenn ($a x$, $a' x'$) mit der vertikalen Projektionsebene parallel ist. Denkt man sich daher die Ebene $a' y'$ (Fig. 36) durch Drehung um die horizontale Axe $a a'$ in die horizontale Projektionsebene niedergelegt, so wird der Winkel $y a z$ in $Y a Z$ als rechter Winkel erscheinen, und der letztere von der Verlängerung der Kante $a x$ halbirt werden; man projicirt nun Y und Z nach Y' und dreht die Ebene $Y a Z$ wieder in ihre wahre Lage $a' y'$ zurück, indem man mit $a' Y'$ den Bogen $Y' y'$ beschreibt und durch Y und Z die mit der Projektionsaxe parallelen Linien $Y y$ und $Z z$ zieht; aus y' werden sofort die Punkte y und z und die Projektionen $a y$ und $a z$ der isometrischen Kanten abgeleitet.

Allerdings ist nun $a x$ nicht mehr $= \frac{1}{2} a y$ oder $= \frac{1}{2} a z$. Man beginnt daher eine zweite Konstruktion, indem man mit $a x_1 = \frac{1}{2} a y$ einen Kreis beschreibt, aus x_1 den Punkt x'_1 und die Linie $a' x'_1$ bestimmt, und auf $a' x_1'$ die Senkrechte $a' y'_1$ errichtet, welche die neue Lage der Grundfläche des Würfels darstellt, worin die zwei isometrischen Kanten enthalten sind.

Als Endresultat ergeben sich ihre von den früheren nur wenig abweichenden neuen Lagen $a y_1$ und $a z_1$. Man hat jetzt nur noch das entsprechende Würfelbild auszuführen.

Anhang.

§. 63.

Zusatz zu §. 12 des ersten Theiles.

Anstatt die Winkel $x_1 M y_1$, $x_1 M z_1$ und $y_1 M z_1$ (siehe Fig. 2 Taf. 1) indirekt durch die Winkel b und b′ zu bestimmen, kann man sie auch unmittelbar durch die Gleichungen ihrer Tangenten berechnen, und diese Bestimmung ist in theoretischer Beziehung eleganter. Sie geschieht auf folgende Weise:

Da $\text{Tang}\, x_1\, M z_1 = \text{Tang}\,(90^0 + b) = -\text{Tang}\,(90^0 - b)$ $= -\text{Cot}\, b = -\frac{1}{\text{Tang}\, b}$ ist, so ergibt sich durch Substitution des in §. 12 enthaltenen Werthes von Tang b in die vorstehende Gleichung folgende:

$$\text{Tang}\, x_1\, M\, z_1 = -\sqrt{\frac{1+m^2+n^2}{1+m^2-n^2} \cdot \frac{1+n^2-m^2}{m^2+n^2-1}} \qquad (A)$$

Ebenso ist:

$$\text{Tang}\, y_1\, M\, z_1 = -\frac{1}{\text{Tang}\, b'} = -\sqrt{\frac{1+m^2+n^2}{1+m^2-n^2} \cdot \frac{m^2+n^2-1}{1+n^2-m^2}} \qquad (B)$$

Endlich ergibt sich:

$$\text{Tang}\, x_1\, M\, y_1 = \text{Tang}\,(180^0 - (b + b'))$$

$$= -\text{Tang}\,(b + b') = \frac{\text{Tang}\, b + \text{Tang}\, b'}{\text{Tang}\, b\,.\,\text{Tang}\, b' - 1.}$$

Nun ist aber $\text{Tang}\, b = \text{Sin}\,\varphi\ \text{Tang}\, h$ (s. §. 9)

und $\text{Tang}\, b' = \frac{\text{Sin}\,\varphi}{\text{Tang}\, h}$ (s. §. 9), also

$$\text{Tang}\, b + \text{Tang}\, b' = \frac{\text{Sin}\,\varphi\ (\text{Tang}\, h^2 + 1)}{\text{Tang}\, h}\,. = \frac{\text{Sin}\,\varphi\,.\,\text{Sec.}\, h^2}{\text{Tang}\, h}$$

$= \frac{\text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}\, h^2\ \text{Tang}\, h}$ In Anmerkung zu §. 12 wurde aber gefunden:

$\text{Sin}\,\varphi = \sqrt{\frac{1 + m^2 - n^2}{1 + m^2 + n^2}}$; $\text{Cos}\,h^2 = \frac{1 + n^2 - m^2}{2\,n^2}$ und $\text{Tang}\,b = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 1}{1 + n^2 - m^2}}$. Also ist $\text{Tang}\,b + \text{Tang}\,b' = \frac{2\,n^2}{1 + n^2 - m^2} \sqrt{\frac{1 + m^2 - n^2}{1 + m^2 + n^2} \cdot \frac{1 + n^2 - m^2}{m^2 + n^2 - 1}}$

Ferner ist $\text{Tang}\,b \,.\, \text{Tang}\,b' = \text{Tang}\,b \,.\, \frac{\text{Sin}^2\,\varphi}{\text{Tang}\,b}$ (s. Seite 7 §. 9).
$= \text{Sin}^2\,\varphi$

also $\text{Tang}\,b \,.\, \text{Tang}\,b' - 1 = \text{Sin}\,\varphi^2 - 1 = -\,\text{Cos}\,\varphi^2 = -\frac{2\,n^2}{1 + m^2 + n^2}$ (s. §. 12.)

Substituirt man nun in die obige Gleichung von $\text{Tang}\,x_1\,M\,y_1$ die gefundenen Werthe von $\text{Tang}\,b + \text{Tang}\,b'$ und $\text{Tang}\,b\,\text{Tang}\,b' - 1$, so ergibt sich $\text{Tang}\,x_1\ M y_1 =$

$$\left[\frac{2\,n^2}{1 + n^2 - m^2} \cdot \sqrt{\frac{1 + m^2 - n^2}{1 + m^2 + n^2} \cdot \frac{1 + n^2 - m^2}{m^2 + n^2 - 1}}\right] : -\frac{2\,n^2}{1 + m^2 + n^2}$$

oder nach einigen sehr einfachen und von selbst in die Augen fallenden Reduktionen,

$$\text{Tang}\,x_1\,M\,y_1 = -\sqrt{\frac{1 + m^2 + n^2}{1 + n^2 - m^2} \cdot \frac{1 + m^2 - n^2}{m^2 + n^2 - 1}} \quad \ldots \text{(C)}$$

Man kann den drei Gleichungen für die Tangenten der Winkel $x_1\,M\,z_1$, $y_1\,M\,z_1$ und $x_1\,M\,y_1$ eine noch schönere Form geben, wenn man $1 + m^2 + n^2 = s$ setzt. Dadurch wird offenbar
$1 + m^2 + n^2 - 2m^2$ oder $1 + n^2 - m^2 = s - 2m^2$ und ebenso
$1 + m^2 + n^2 - 2\,n^2$ oder $1 + m^2 - n^2 = s - 2\,n^2$, sowie
$1 + m^2 + n^2 - 2$ oder $m^2 + n^2 - 1 = s - 2$, also

$$\text{(A)}\ \text{Tang}\,x_1 M z_1 = -\sqrt{\frac{s\,(s - 2\,m^2)}{(s - 2\,n^2)\,(s - 2)}} = -\sqrt{\frac{\frac{1}{2}s\,(\frac{1}{2}s - m^2)}{(\frac{1}{2}s - n^2)\,(\frac{1}{2}s - 1)}}$$

$$\text{(B)}\ \text{Tang}\,y_1\,M\,z_1 = -\sqrt{\frac{s\,(s - 2)}{(s - 2n^2)(s - 2m^2)}} = -\sqrt{\frac{\frac{1}{2}s\,(\frac{1}{2}s - 1)}{(\frac{1}{2}s - n^2)(\frac{1}{2}s - m^2)}}$$

$$\text{(C)}\ \text{Tang}\,x_1\,M y_1 = -\sqrt{\frac{s\,(s - 2n^2)}{(s - 2m^2)\,(s - 2)}} = -\sqrt{\frac{\frac{1}{2}s\ .\ (\frac{1}{2}s - n^2)}{(\frac{1}{2}s - m^2)\,(\frac{1}{2}s - 1)}}$$

§. 64.

Zusatz zu §. 13 des ersten Theiles,

die analytische Theorie der zweiarig-isometrischen Projektionen der zweiten Art enthaltend. (Vergl. §§. 54, 55 und 56 des vierten Theiles und Fig. 1 und 2 Tafel 1.)

Wenn man die Bedingung festsetzt, daß die Projektionen gleicher Längen der Axen Mx und Mz gleich groß oder isometrisch erscheinen sollen, so muß der Werth von $\frac{M z_1}{M x_1}$ (s. Fig. 2 Tafel 1), den wir mit n bezeichnet haben, gleich 1 gesetzt werden.

Es ist aber $n = \frac{\text{Cos } \varphi}{\text{Cos a}}$; wenn nun $n = 1$ sein soll, so muß $\text{Cos } \varphi = \text{Cos a}$, also auch $\text{Sin } \varphi = \text{Sin a}$ und $\varphi = a$, d. h. die Axen Mx und Mz müssen mit der Bildebene gleiche Winkel einschließen. Substituirt man für Sin a seinen Werth Sin φ in die Gleichung:

$\text{Sin a} = \text{Sin h Cos } \varphi$ (s. §. 9 Seite 6),

so wird $\text{Sin } \varphi = \text{Sin h Cos } \varphi$, also

$$\text{Sin h} = \text{Tang } \varphi . \qquad \text{(D)}$$

Weil h der Winkel ist, welchen die Coordinatenaxe Mx (Fig. 1 Taf. 1) mit der Drehungsaxe BMC einschließt, so bildet Mx mit der auf der Drehungsaxe senkrecht stehenden Horizontalprojektion der Sehrichtung den Winkel: $90^0 - h$, und letztere mit der Coordinatenaxe My den Winkel h.

Da man nun in der zweiarig-isometrischen Projektionsmethode dem Coordinatensysteme stets eine solche Lage gibt, daß Mx mit der einen und My mit der andern horizontalen Hauptrichtung parallel ist, so bezeichnen demnach h und $90^0 - h$ die Winkel, welche die horizontale Projektionen der Sehrichtung mit der Längen- und Breitenrichtung des Körpers einschließen, d. h. h oder $90^0 - h$ ist der Deklinationswinkel und φ der Neigungswinkel der Sehstrahlen.

Aus der Gleichung: $\text{Sin h} = \text{Tang } \varphi$ folgt, daß man dem Winkel h jeden Werth zwischen 0^0 und 90^0 geben kann, nicht aber auch dem Winkel φ; denn da $\text{Sin } 0^0 = 0$ und $\text{Sin } 90^0 = 1$ ist, so ist der kleinste Werth von $\varphi = 0$ und sein größtmöglicher Werth $= 45^0$, weil $\text{Tang } 45^0 = 1$ ist. Soll demnach φ größer

werden als 45°, so hat man eine zweiarig-isometrische Projektion der ersten Art, oder im Falle h gleichzeitig einen bestimmten Werth besitzen soll, eine einarig-isometrische Projektion auszuführen. Ein solcher Fall möchte jedoch sehr selten vorkommen, weil die Projektionen bei großen Werthen von φ meistens unschön und zugleich unzweckmäßig ausfallen.

Wir haben nun noch den Werth von m und die Gleichungen für die Tangenten der Winkel $x_1 M z_1$, $y_1 M z_1$ und $x_1 M y_1$ zu bestimmen, wenn $n = 1$ gesetzt und φ als gegeben betrachtet wird.

Es ist: $m = \frac{\text{Cos } a'}{\text{Cos } a}$ (s. §. 9 Nr. 7).

Da ferner $\text{Sin } a' = \text{Cos } h \text{ Cos } \varphi$ ist, (s. §. 9) so muß $\text{Cos } a'^2 = 1 - \text{Cos } h^2 \text{ Cos } \varphi^2 = 1 - (1 - \text{Sin } h^2) \text{ Cos } \varphi^2$ sein. Setzt man nun für Sin h den oben gefundenen Werth Tang φ, so ergibt sich: $\text{Cos } a'^2 = 1 - \text{Cos } \varphi^2 + \text{Sin } \varphi^2 = 2 \text{ Sin } \varphi^2$, oder

$$\text{Cos } a' = \text{Sin } \varphi \sqrt{2}.$$

Ferner ist, wie wir oben gefunden haben:

$$\text{Cos } a = \text{Cos } \varphi, \text{ also}$$

$$m = \frac{\text{Sin } \varphi \sqrt{2}}{\text{Cos } \varphi} = \text{Tang } \varphi \sqrt{2} \quad \ldots\ldots \quad (E)$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß der Werth des Verhältnisses m zwischen 0 und $\sqrt{2}$ liegen muß, weil der kleinste Werth von $\text{Tang } \varphi = 0$ und der größte $= 1$ ist

Setzt man endlich in die Gleichungen (A), (B) und (C) des vorhergehenden Paragraphen für n den Werth 1, so ergibt sich:

$$\text{Tang } x_1 M z_1 = -\sqrt{\frac{(2+m^2)(2-m^2)}{m^4}} = -\frac{1}{m^2}\sqrt{(2+m^2)(2-m^2)} \quad (F)$$

$$\text{Tang } y_1 M z_1 = -\sqrt{\frac{(2+m^2)\,m^2}{m^2.(2-m^2)}} = -\sqrt{\frac{(2+m^2)}{(2-m^2)}} \quad \ldots\ldots \quad (G)$$

$$\text{Tang } x_1 M y_1 = -\sqrt{\frac{(2+m^2).m^2}{(2-m^2).m^2}} = -\sqrt{\frac{(2+m^2)}{(2-m^2)}} \quad \ldots\ldots \quad (H)$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt die Gleichheit der Winkel $y_1 M z_1$ und $x_1 M z_1$. In allen diesen Gleichungen muß noch für m der Werth $\text{Tang } \varphi \sqrt{2}$ substituirt werden, weil wir φ als gegeben vorausgesetzt haben.

§. 65.

Nimmt man mit Weisbach die Verhältnißzahl m als gegeben an (immer unter der Voraussetzung, daß $n = 1$ sei), so gehen die Gleichungen von $\mathrm{Cos}\, h^2$ in §. 10 des ersten Theiles, sowie die von $\mathrm{Cos}\, \varphi^2$, $\mathrm{Cos}\, a^2$ und $\mathrm{Cos}\, a'^2$ des §. 12 in folgende über:

$$\mathrm{Cos}\, h^2 = \frac{2 - m^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{Cos}\, \varphi^2 \\ \text{und } \mathrm{Cos}\, a^2\end{array}\right\} = \frac{2}{2 + m^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (K)$$

$$\mathrm{Cos}\, a'^2 = \frac{2\, m^2}{2 + m^2} = m^2\, \mathrm{Cos}\, a^2 \quad \ldots\ldots \quad (L)$$

wozu noch die Gleichung (D) und die Gleichungen F, G und H des vorhergehenden Paragraphen gehören. Der denkende Leser wird sogleich die Uebereinstimmung dieser Formeln mit denjenigen des §. 13 des ersten Theiles erkennen.

§. 66.

Wenn man sich mittelst dieser Gleichungen Hülfstafeln berechnen will, welche für verschiedene Hauptwerthe von m zwischen o und $\sqrt{2}$, die Werthe von h und φ oder die Lage der Sehrichtung und die Richtungen der drei Bildaren durch die Winkel $x_1\, Mz_1$, $y_1\, Mz_1$ und $x_1\, My_1$ angeben, so sind obige Formeln nicht bequem, sobald m kleiner als 1, z. B. $= \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ 2c. angenommen wird. Da nun aber diese Annahme bei weitem am häufigsten stattfindet, so ist es zweckmäßig, in obige Formeln statt m, dessen reziproken Werth $\frac{1}{m}$ einzuführen. Setzt man für $\frac{1}{m}$ die Größe m', so wird $m = \frac{1}{m'}$, also im Falle $m = \frac{1}{2}$ ist, $m' = 2$. Dadurch verwandeln sich nun die Gleichungen (F), (G), (H) (I) und (K) in folgende:

$$\mathrm{T.}\, x_1 Mz_1 = -m'^2 \sqrt{\left(2+\frac{1}{m'^2}\right)\left(2-\frac{1}{m'^2}\right)} = -\sqrt{(2m'^2+1)\,(2m'^2-1)} \quad (M)$$

$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{Tang}\, y_1\, Mz_1 \\ \text{und } \mathrm{Tang}\, y_1\, Mx_1\end{array}\right\} = -\sqrt{\frac{2+\frac{1}{m'^2}}{2-\frac{1}{m'^2}}} = -\sqrt{\frac{2\, m'^2+1}{2\, m'^2-1}} \quad \ldots \quad (N)$$

$$\mathrm{Cos}\, h^2 = \frac{2 - \frac{1}{m'^2}}{2} = \frac{2\, m'^2 - 1}{2\, m'^2}$$

$$\mathrm{Cos}\, \varphi^2 = \frac{2}{2 + \frac{1}{m'^2}} = \frac{2\, m'^2}{2\, m'^2 + 1}$$

Statt der beiden letztern Gleichungen bedient man sich aber noch zweckmäßiger der Gleichungen (D) und (E) in §. 64); aus (E) folgt:

$$\mathrm{Tang}\ \varphi = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{m' \sqrt{2}}$$ also

(O) . . . $\mathrm{Cotang}\, \varphi = m' \sqrt{2}$; hiezu kommt noch die Gleichung (D), nämlich: $\mathrm{Sin}\ h = \mathrm{Tang}\ \varphi = \frac{1}{m' \sqrt{2}}$.

Mittelst der Formeln (M), (N), (O) und (D) ist folgende kleine Hülfstafel berechnet worden, welche in Verbindung mit der auf Seite 28 mitgetheilten Tafeln: für die erste Hauptrichtung der Sehstrahlen, den praktischen Zeichnern für die meisten Fälle ausreichen wird.

Hülfstafel zur Konstruktion zweiarig-isometrischer Projektionen, wenn n = 1 gesetzt wird oder die Höhen und Längen (resp. Breiten) isometrisch werden sollen. (Vgl. Fig. 2 Taf. 1.)

Werthe von m und m'.		Werthe von φ.	Werthe von h.	Werthe von x_1 Mz_1.	Werthe von y_1 M z_1 und y_1 Mx_1.
$\frac{1}{5}$	5	8°3′	8°8′	91°8′	134°26′
$\frac{1}{4}$	4	10°1′	10°10′	91°46′	134°7′
$\frac{1}{3}$	3	13°16′	13°38′	93°12′	133°24′
$\frac{1}{2}$	2	19°′28	20°42′	97°10′	131°25′
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	25°14′	28°7′	102°50′	128°35′
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	27°57′	32°3′	106°20′	126°50′

Um den Gang der Rechnung deutlich zu machen, wollen wir dieselbe für den Fall ausführen, wenn $m = \frac{1}{5}$ gesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung ist $m' = 5$ und $\text{Cotang}\ \varphi = 5\sqrt{2}$. (Gl. O)

Nun ist: $\log 5 = 0{,}69897 \ldots\ldots\ldots 0{,}69897$

und $\log \sqrt{2} = 0{,}30103 : 2 = \quad 0{,}15051$

also $\log \text{Cotang}\ \varphi = \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}84948$

Hieraus folgt: $\varphi = 8^0 3'$ und

$$\log \text{Tang}\ \varphi = \log \text{Sin}\ h = 9{,}15054, \text{ (Gl. D)}$$

folglich $h = 8^0 8'$

Die horizontale Projektion der Sehrichtung bildet also mit der Are My (Fig. 1 Taf. 1) einen Winkel $= 8^0 8'$ und der Neigungswinkel der Sehrichtung ist $= 8^0 3'$.

Ferner ist:

(Gl. N) $\text{Tang}\ x_1 M z_1 = -\sqrt{(2 . 5^2 + 1)(2 . 5^2 - 1)} = -\sqrt{51 . 49}$

$$\left.\begin{matrix}\text{Tang}\ y_1 M z_1 \\ \text{und Tang}\ y_1 M x_1\end{matrix}\right\} = -\sqrt{\frac{2 . 5^2 + 1}{2 . 5^2 - 1}} = -\sqrt{\frac{51}{49}}$$

Da nun $\log 51 = 1{,}70757$

und $\log 49 = 1{,}69020$ ist, so folgt:

$$\log \sqrt{51 . 49} = 3{,}39777 : 2 = 1{,}69889$$

$$\log \sqrt{\frac{51}{49}} = 0{,}01737 : 2 = 0{,}00869$$

Es ist also $\log \text{Tang}\ x_1 M z_1 = 1{,}69889 -$ *) und

$$\left.\begin{matrix}\log \text{Tang}\ y_1 M z_1 \\ \text{und } \log \text{Tang}\ y_1 M x_1\end{matrix}\right\} = 0{,}00869 -$$

Hieraus folgt Winkel $x_1 M z_1 = 180^0 - 88^0 51' = 91^0 9'$

$$\left.\begin{matrix}\text{und Winkel}\ y_1 M z_1 \\ \text{sowie Winkel}\ y_1 M x_1\end{matrix}\right\} = 180^0 - 45^0 34' = 134^0 26'.$$

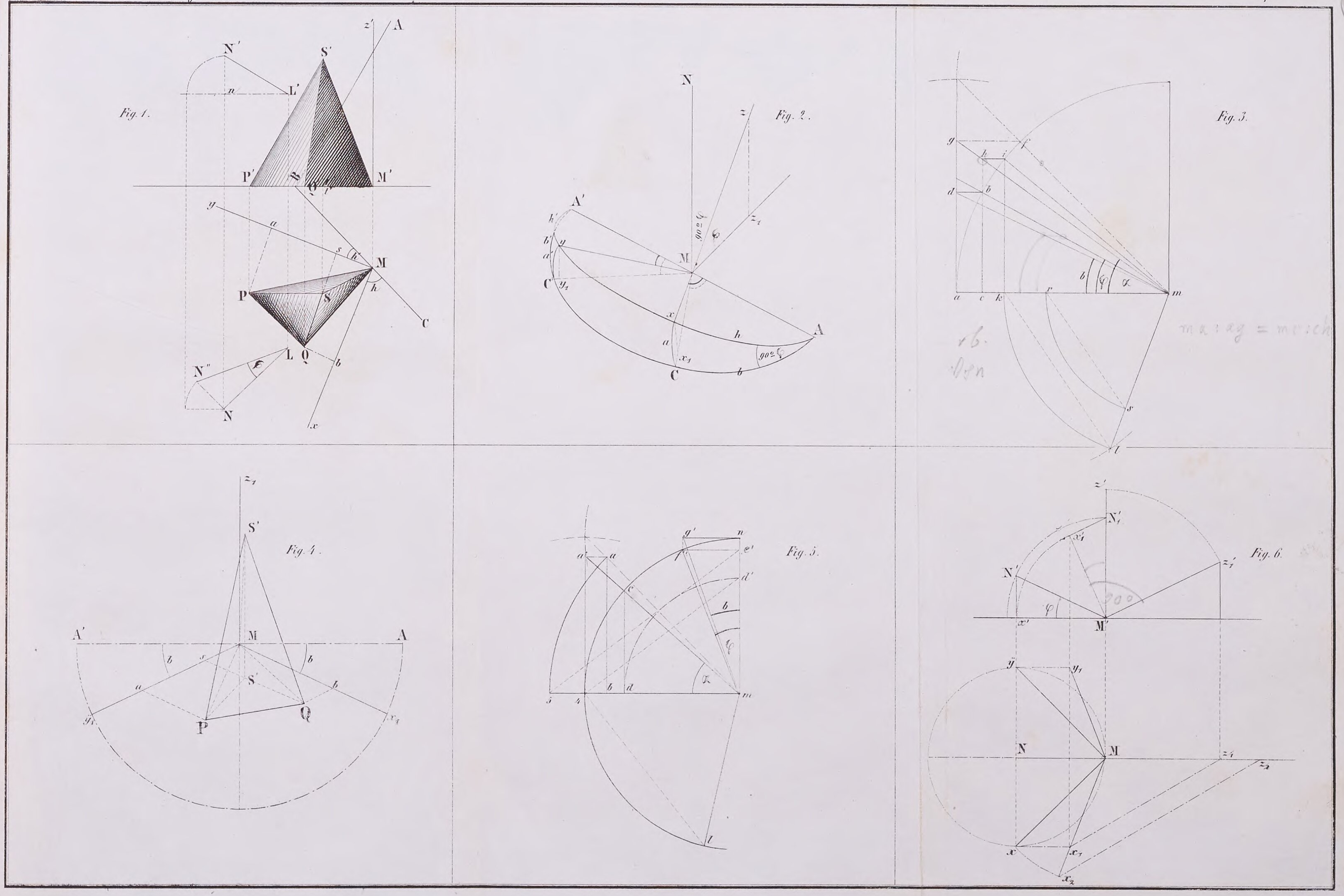
Die Prüfung der Richtigkeit dieser Winkel besteht darin, daß ihre Summe gleich 360^0 sein muß. Der hier stattfindende Plusfehler von 1′ rührt von der nicht vollkommen genauen Bestimmung der Winkel her, welche jedoch für die Praxis mehr als genügend ist.

---

*) Das am Ende beigesetzte Minuszeichen erinnert an den negativen Werth der Tangente, und somit auch daran, daß der entsprechende Winkel ein stumpfer ist.

Druckfehler.

Seite 2 Zeile 6 von unten, statt Tedräder lies: Tetrander.
\- 7 - 6 statt W A m C lies: W A′ m C
\- 7 - 15 statt $\frac{M z_1}{M x_1}$ $\frac{Cos\ \varphi}{Cos\ a}$ lies: $\frac{M z_1}{M x_1} = \frac{Cos\ \varphi}{Cos\ a}$
\- 9 - 15 statt (I) lies: (C)
\- 11 - 14 von unten statt Sin a lies: Sin a′.
\- 11 - 2 „ „ „ Projektionen der, lies: Projektionen gleich großer und ꝛc.
\- 15 - 9 von unten, nach „horizontalen“ setze hinzu: oder vertikalen.
\- 17 - 6 „ „ statt A A′ lies: MC.
\- 19 - 14, 18 und 19 statt S′s′ lies: St.
\- 20 - 2 von unten statt $\frac{5}{4}$ ma lies: $\frac{5}{4}$ m 4.
\- 30 - 2 statt Verhältnisse lies: Verständnisse.
\- 35 - 18 „ Winkels b lies: Wikelb′.
\- 37 - 8 von unten, statt sogleich lies: folglich.
\- 40 - 11 statt Mx lies: M_1 x.
\- 45 - 4 „ Ordinaten lies: Coordinaten.
\- 53 - 3 von unten, statt Ebene lies: Ebenen
\- 56 - 7 statt abfg (Fig. 6) lies: abfghda (Fig. 8).
\- 56 - 16 „ Die vertikalen lies: Die Projektionen der vertikalen.
\- 56 - 17 statt die horizontalen lies: die Projektionen der horizontalen.
\- 57 - 17 von unten, statt werden lies: würden.
\- 59 - 14 „ „ „ xcz_1 lies: xcz.
\- 59 - 11 „ „ „ Grundriß lies: geometrischer Grundriß.
\- 61 - 11 statt Fig. 15 lies: Fig. 12



$Mx_1 : Mx_2 = Mz_1 : Mz_2$

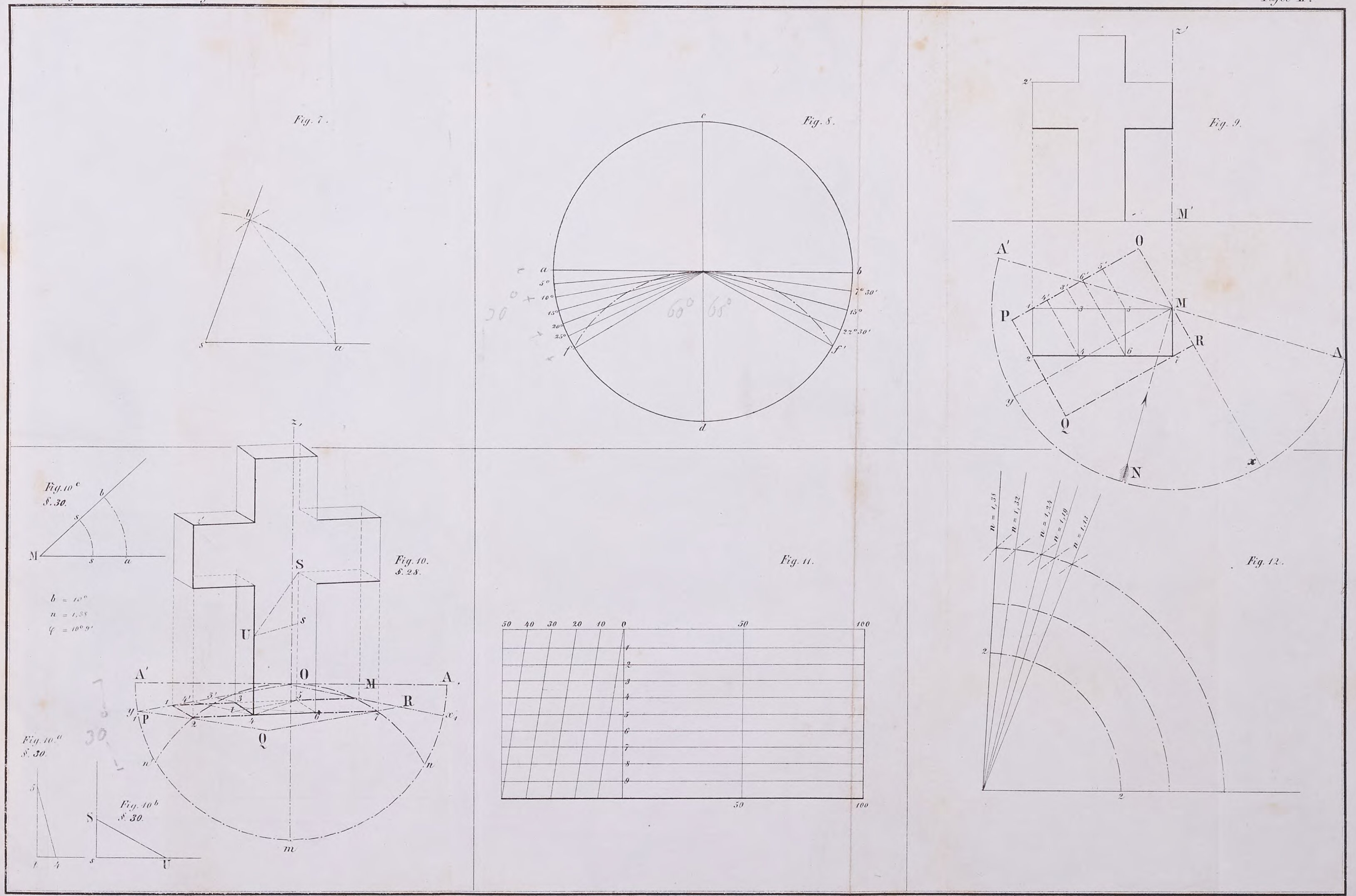

Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
§. 28.
Fig. 10.c
§. 30.
Fig. 10.a
§. 30
Fig. 10.b
§. 30
Fig. 11.
Fig. 12.

Fig. 13.

b = 15°
n = 1,32
φ = 15° 33'

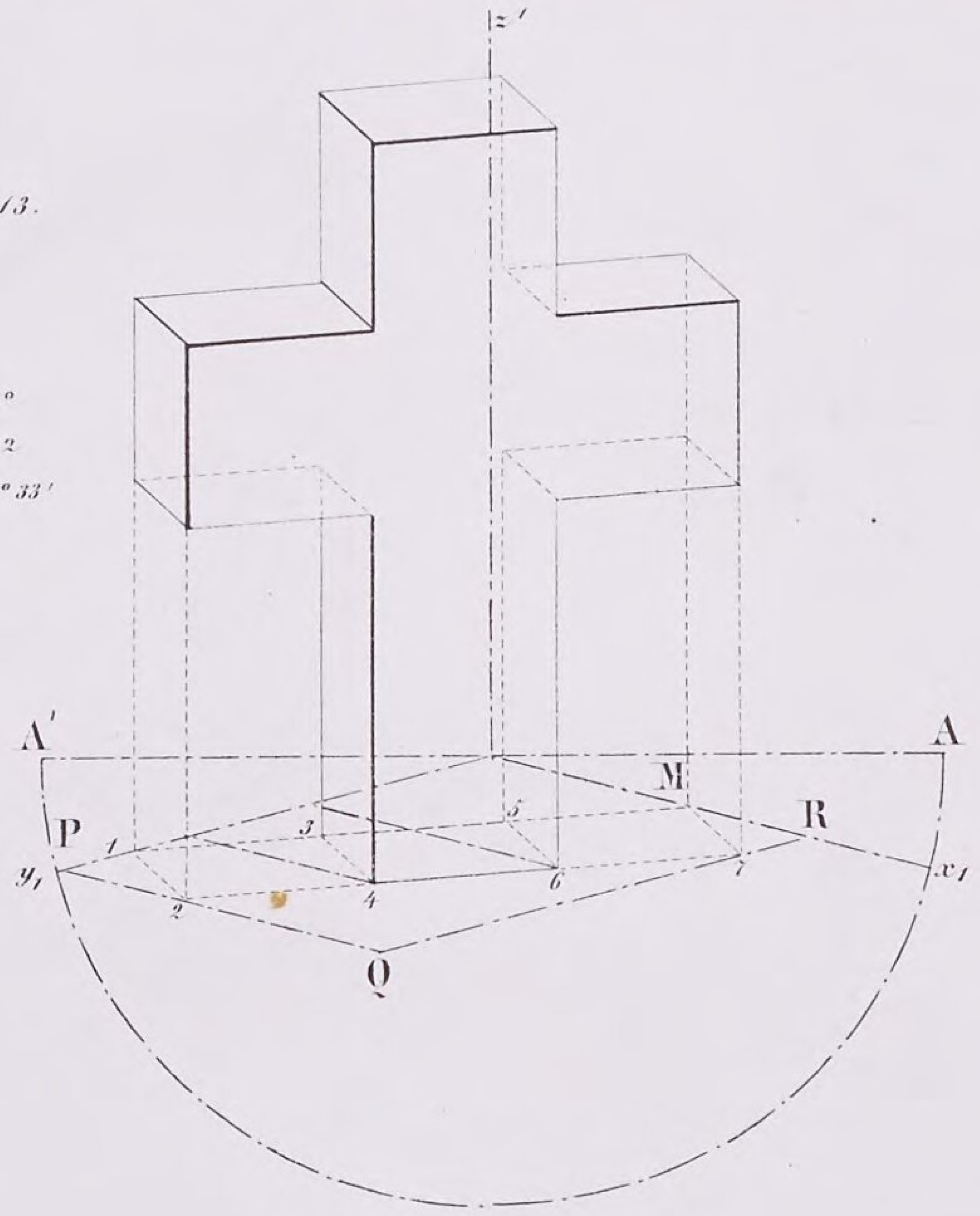


Fig. 14.

b = 20°
n = 1,24
φ = 21° 21'

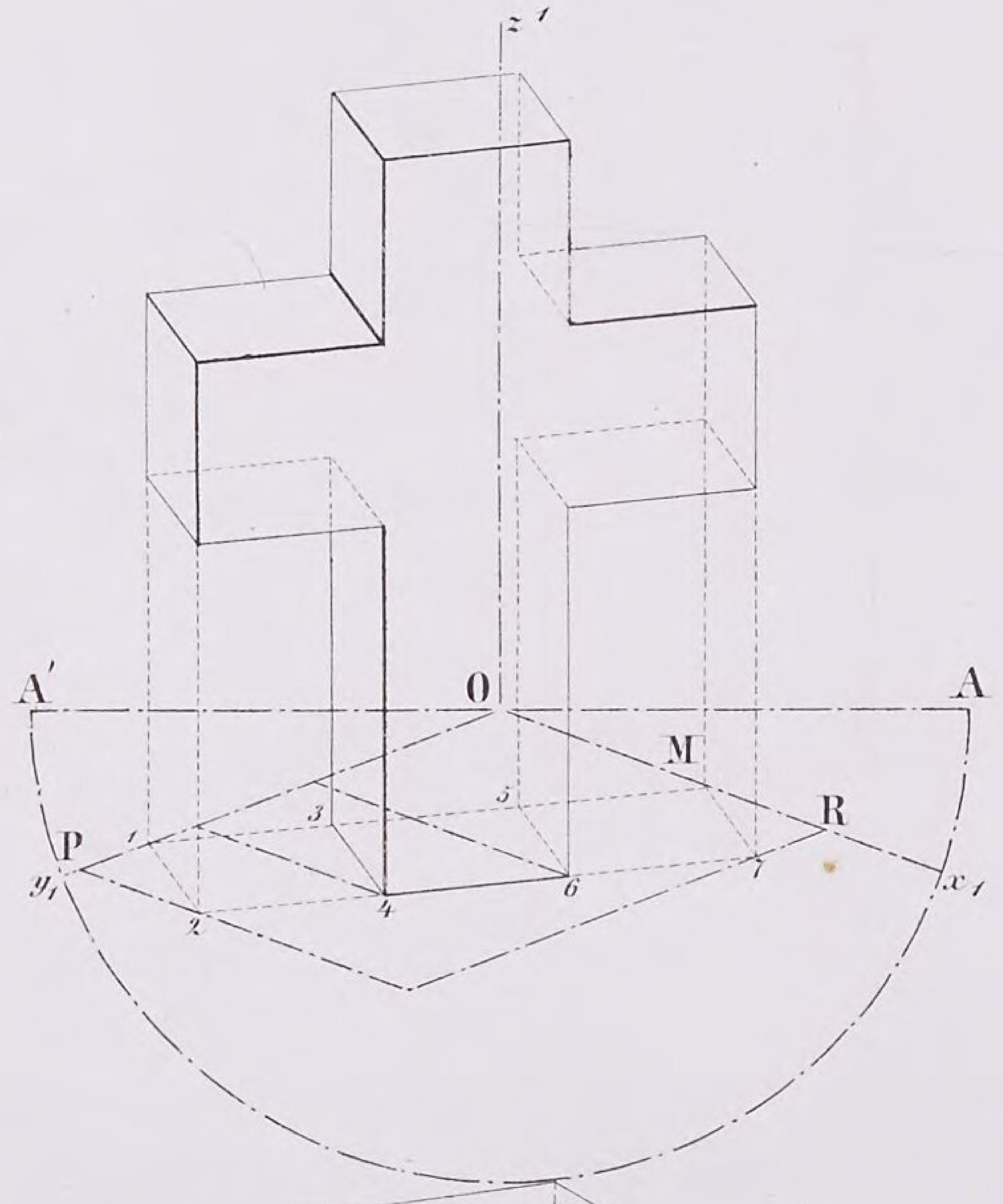


Fig. 15.

b = 22° 30'
n = 1,19
φ = 24° 28

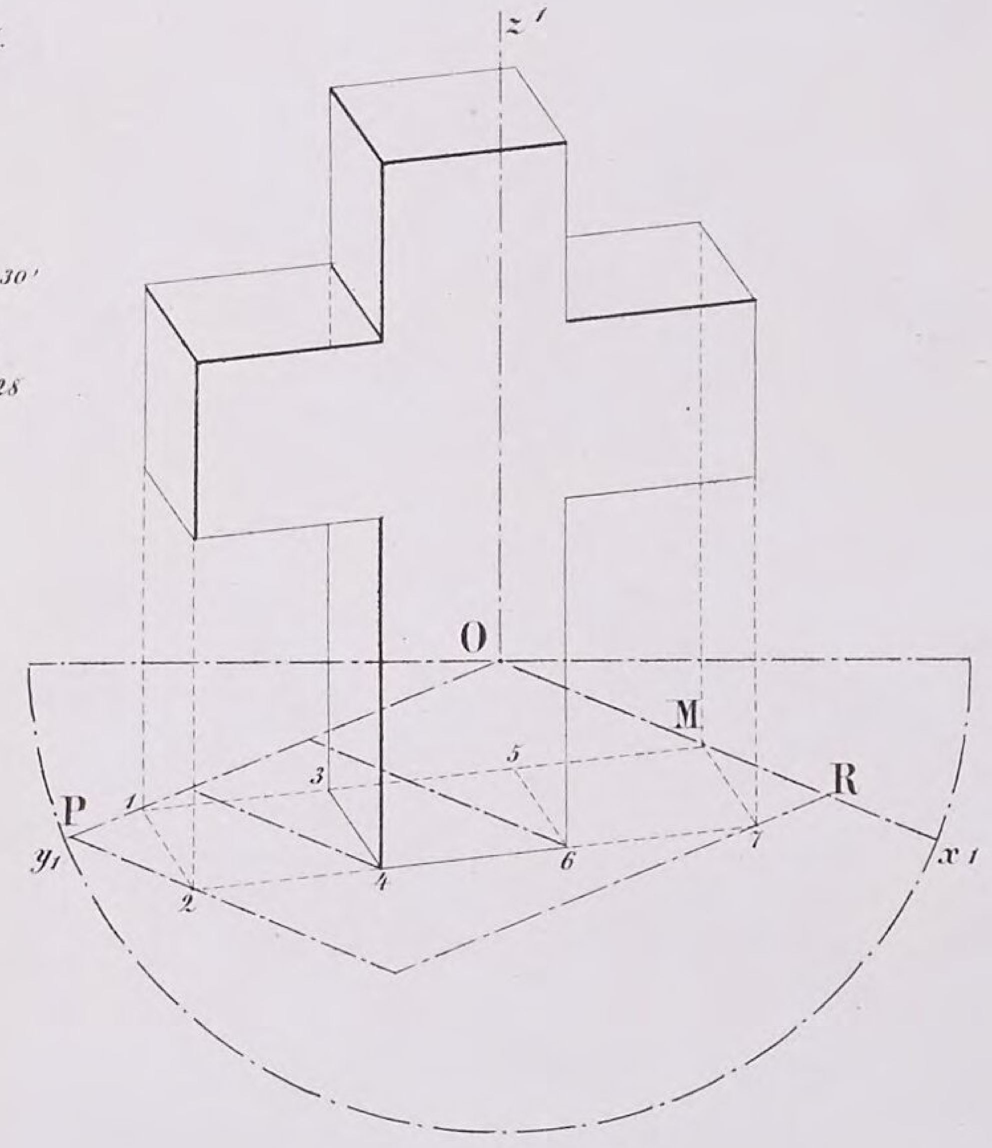


Fig. 16.

b = 25°
n = 1,13
φ = 27° 48

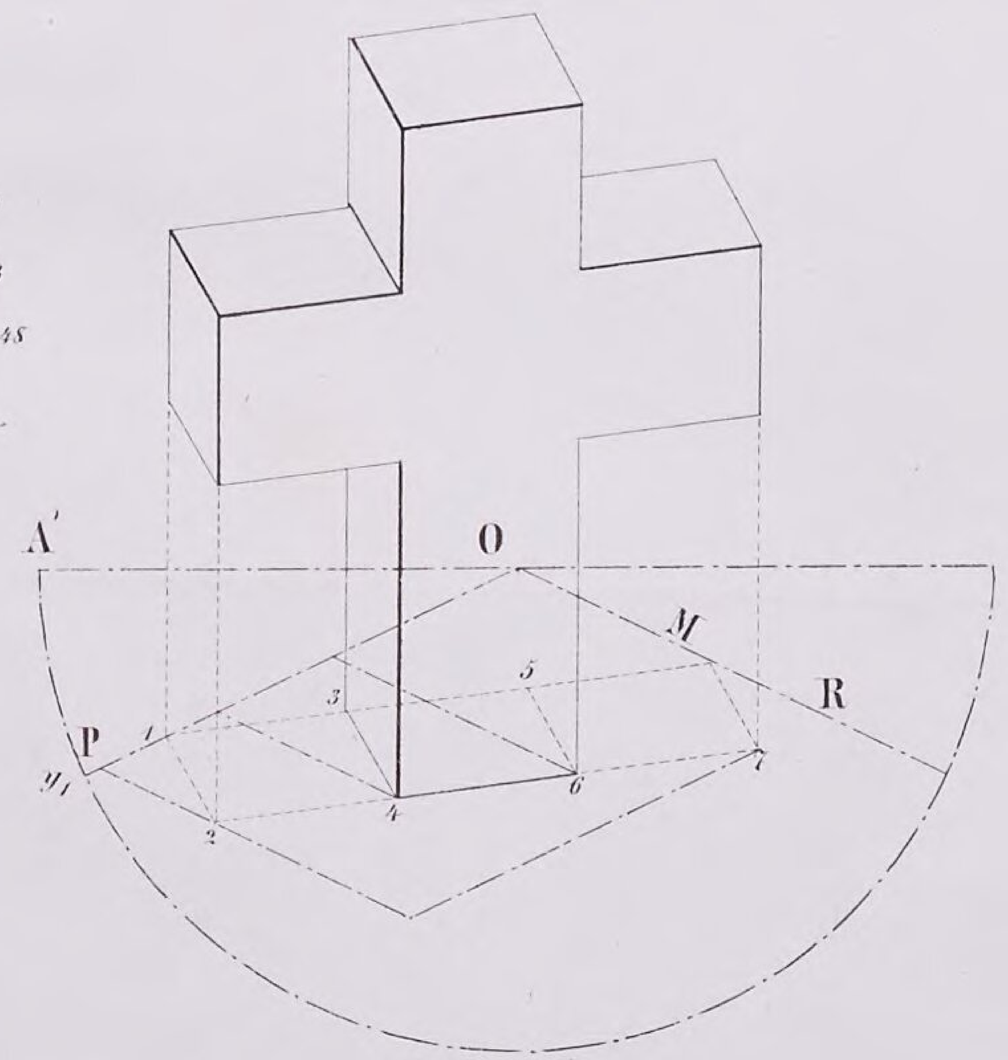


Fig. 17.

φ = 15°
h = 65°
h' = 25°
Tang b = 0,121
Tang b' = 0,555
$\frac{1}{m}$ = 1,889
$\frac{n}{m}$ = 2

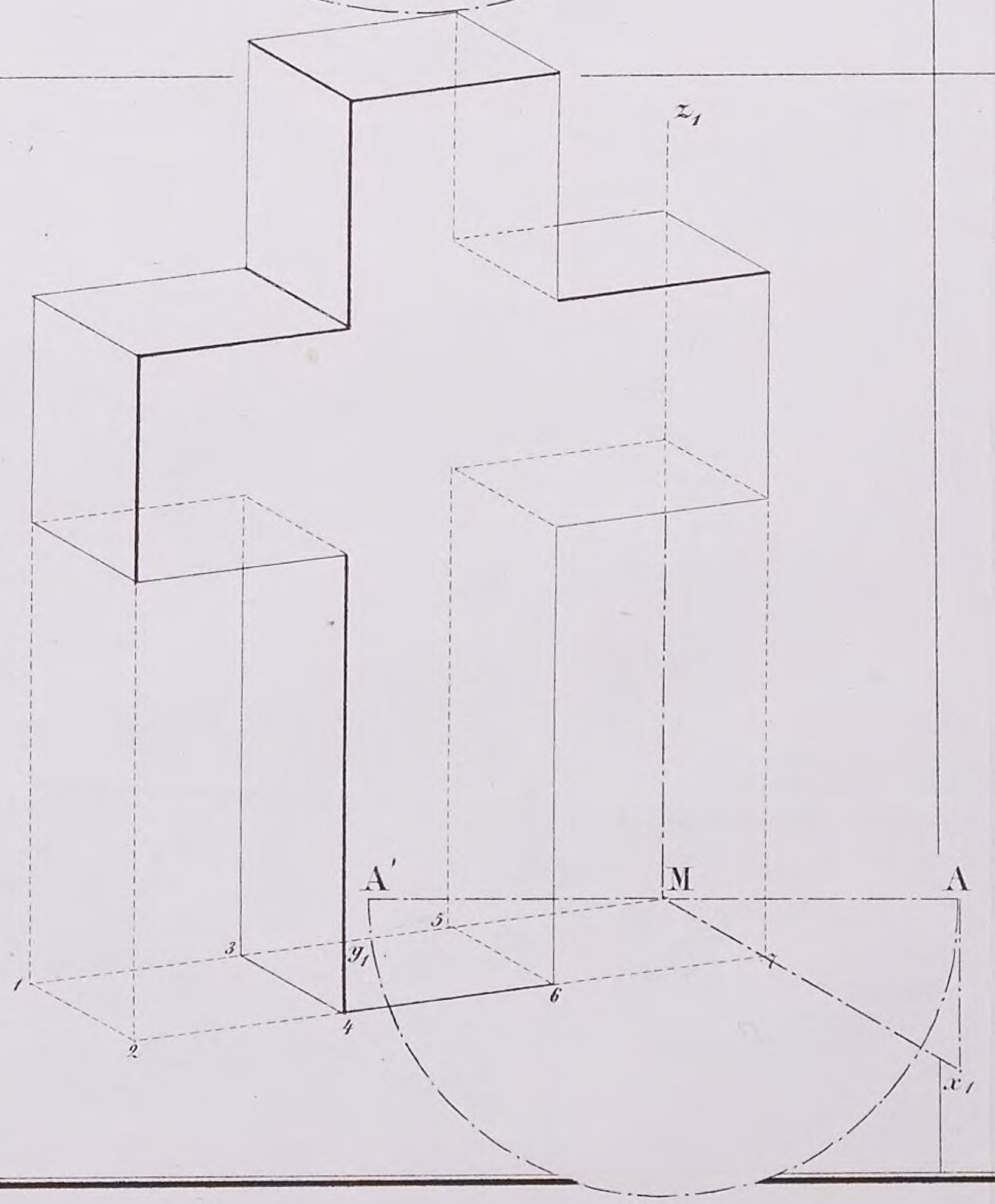
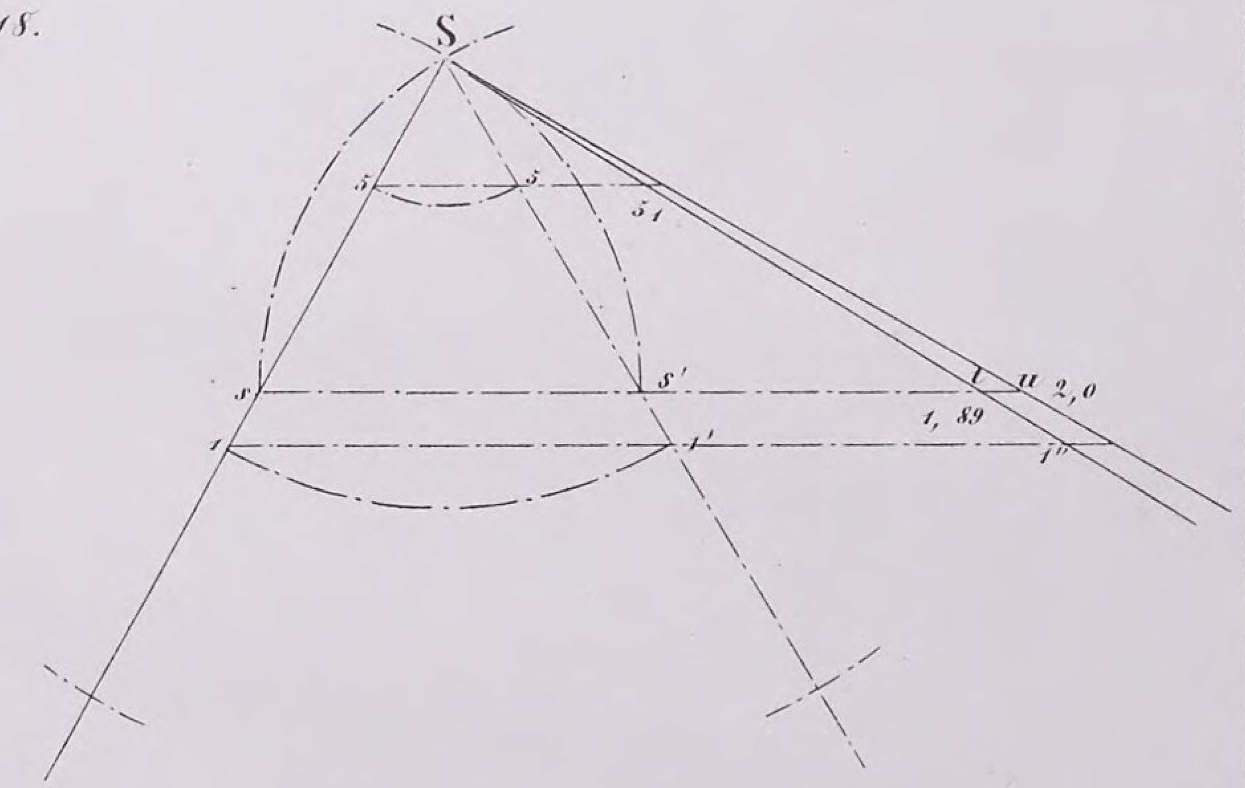
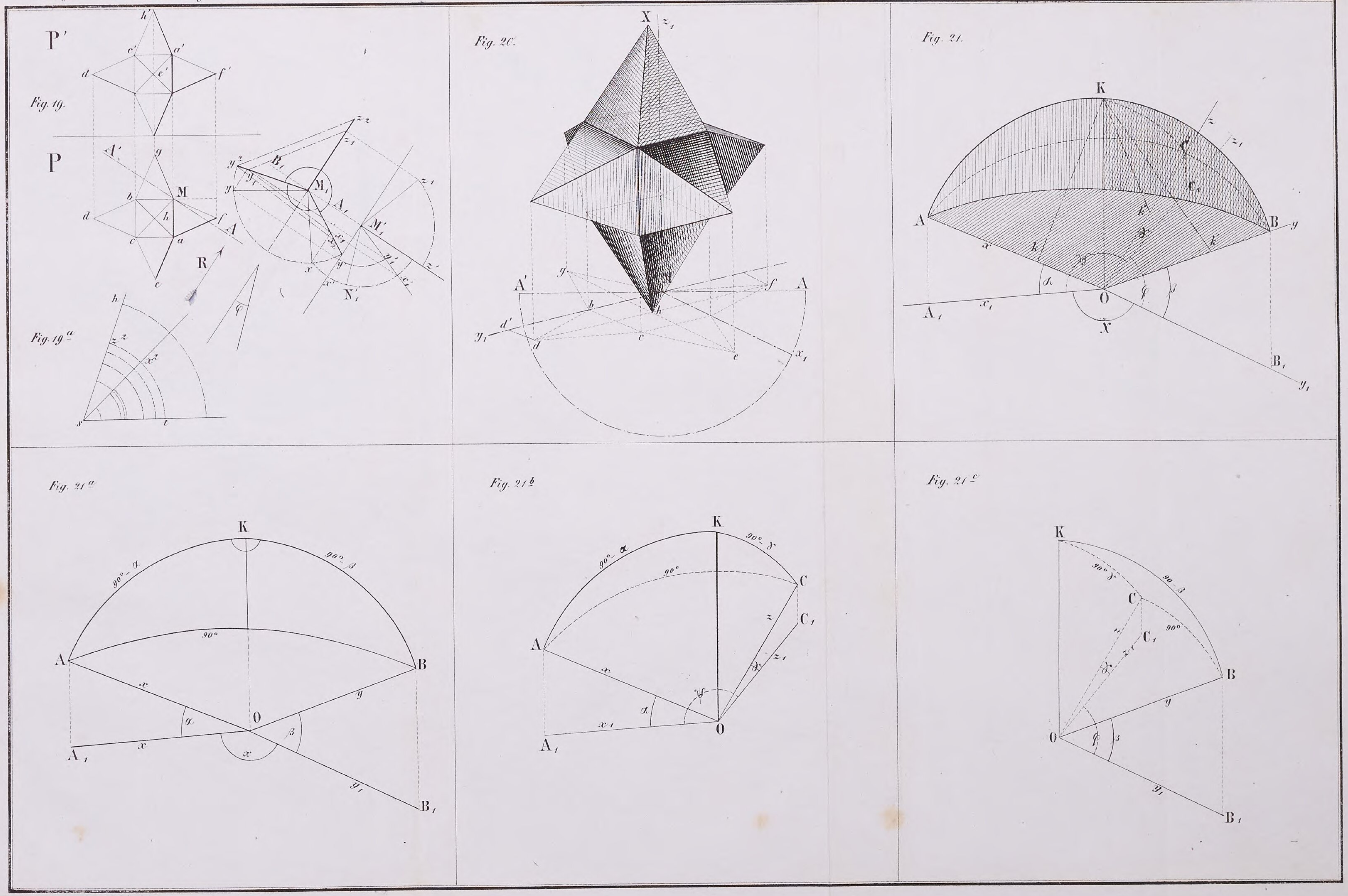
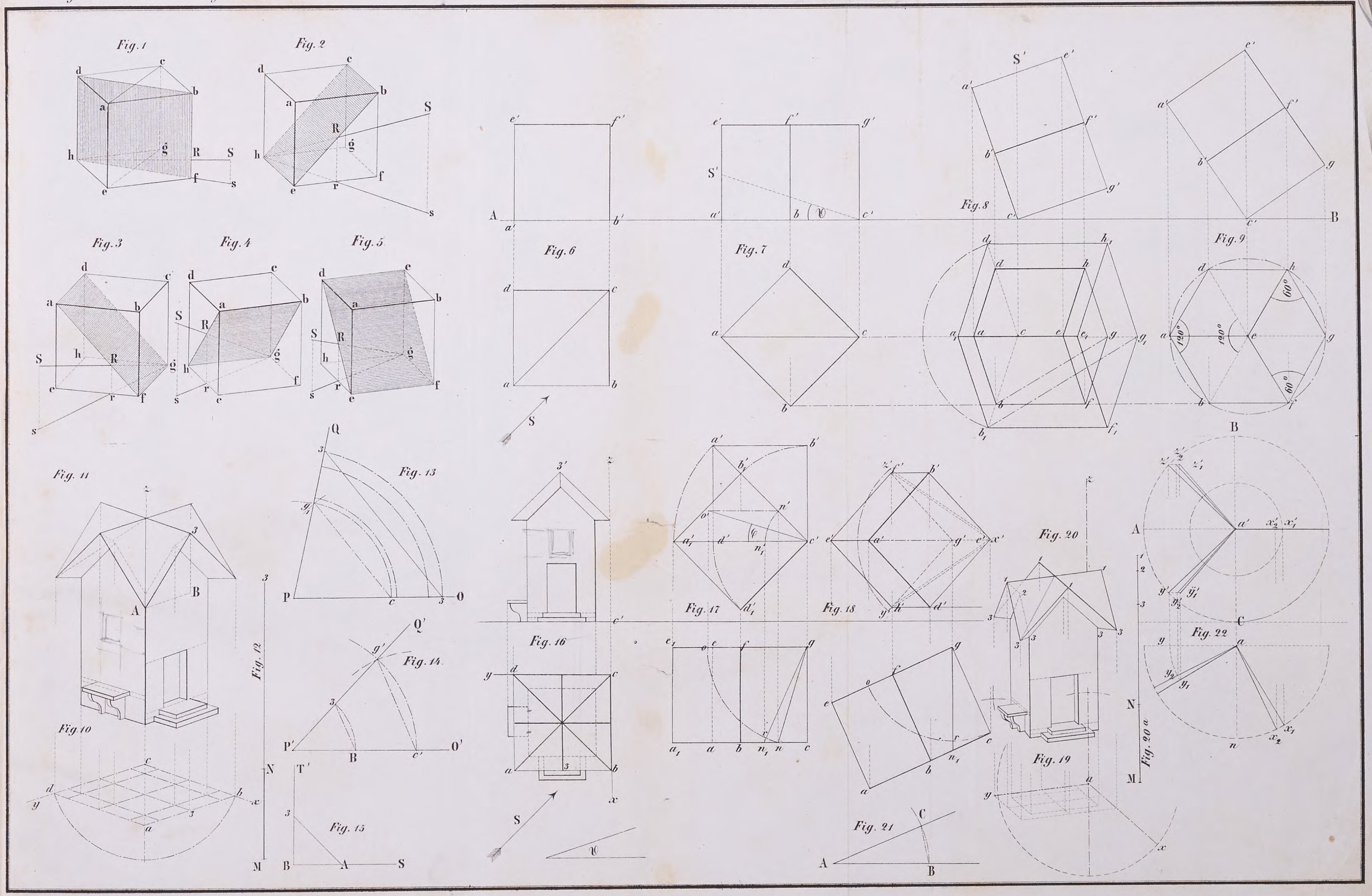
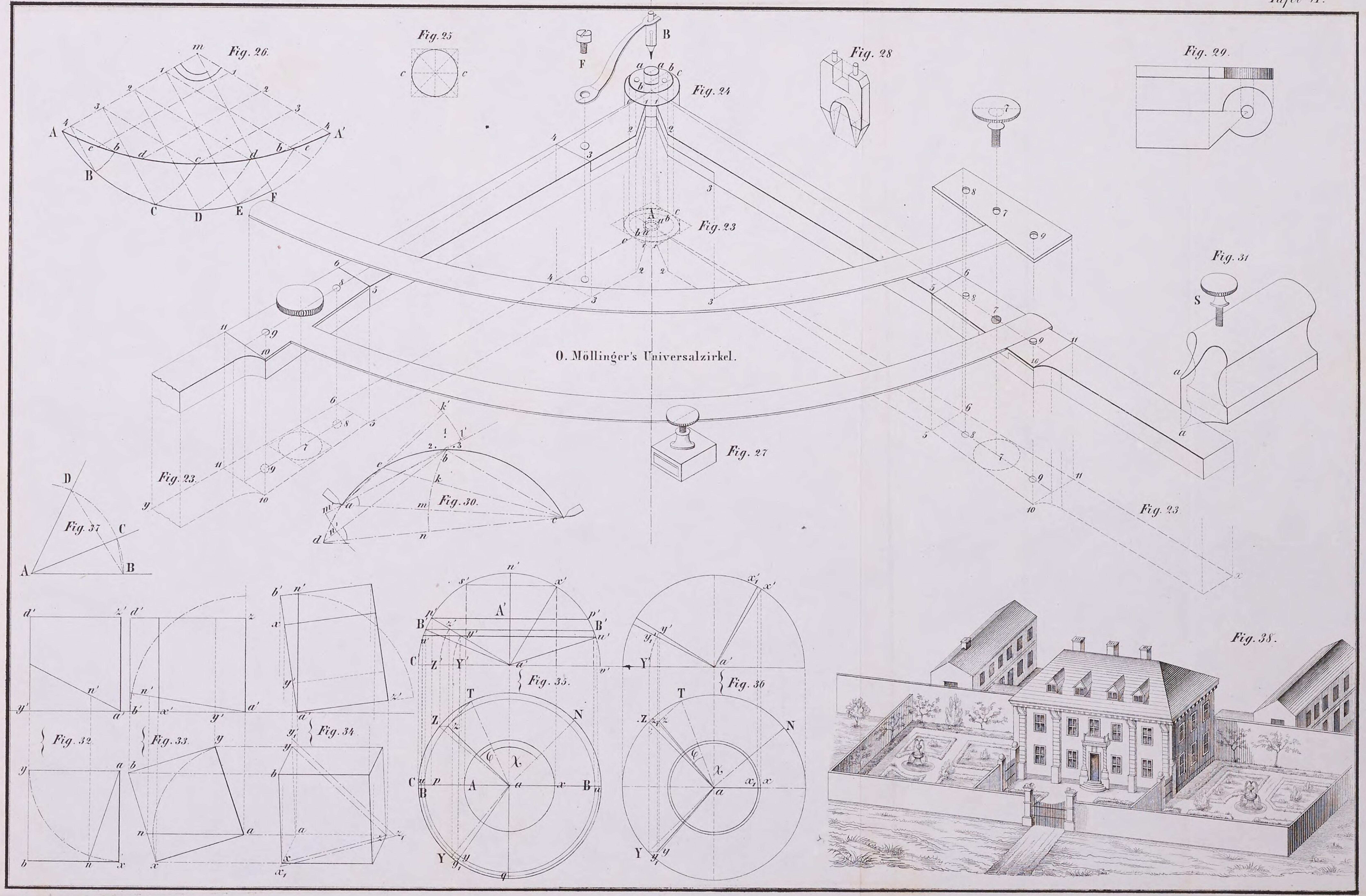


Fig. 18.




Fig. 19.
Fig. 19a
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 21a
Fig. 21b
Fig. 21c


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 20 a
Fig. 21
Fig. 22


Fig. 26.
Fig. 25
Fig. 24
Fig. 28
Fig. 29.
Fig. 23
Fig. 31
O. Möllinger's Universalzirkel.
Fig. 27
Fig. 23
Fig. 30.
Fig. 37
Fig. 23
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35.
Fig. 36
Fig. 38.

Möllinger, Otto,

Lehrbuch der dis-isometrischen und mono-isometrischen Parallelperspektive
mit besonderer Rücksicht auf das technische Zeichnen

Zürich [u.a.] 1853